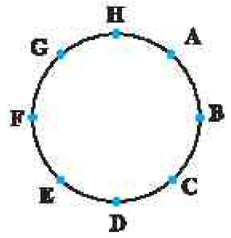
۱۰۹- از ۱۰ پرسش موجود، به چند طریق می‌توان ۸ پرسش را جهت پاسخگویی انتخاب کرد به شرط آن‌که حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟ *(ریاضی داخل ۸۹)*

۱) ۲۵　　۲) ۳۰　　۳) ۳۲　　۴) ۳۵

۱۱۰- از بین ۱۲ عضو انجمن خانه و مدرسه، به چند طریق می‌توان ۳ نفر را طوری انتخاب کرد که همواره ۱ فرد مورد نظر بین آن ۳ نفر باشد؟ *(انسانی داخل ۸۰)*

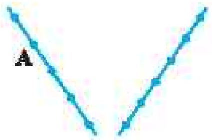
۱) ۶۰　　۲) ۵۵　　۳) ۶۶　　۴) ۷۲

۱۱۱- با نقاط شکل روبه‌رو، چند مثلث شامل رأس A می‌توان ساخت؟



۱) ۱۸
۲) ۲۱
۳) ۲۴
۴) ۲۸

۱۱۲- با نقاط شکل روبه‌رو، چند مثلث شامل رأس A می‌توان ساخت؟



۱) ۲۰　　۲) ۲۷
۳) ۳۵　　۴) ۳۹

فرض کنیم مجموعهٔ A به‌صورت $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ باشد؛ (به سؤالات ۱۱۳ و ۱۱۴ پاسخ دهید.)

۱۱۳- مجموعهٔ A چند زیرمجموعهٔ سه عضوی و شامل عضو a دارد؟

۱) ۸　　۲) ۱۰　　۳) ۱۲　　۴) ۱۵

۱۱۴- مجموعهٔ A چند زیرمجموعهٔ سه عضوی دارد به‌طوری‌که شامل عضو a و فاقد عضو b باشد؟

۱) ۶　　۲) ۱۰　　۳) ۱۵　　۴) ۲۱

۱۱۵- در یک اتومبیل معمولی، ۵ نفر به چند طریق می‌توانند بنشینند، به‌طوری‌که ۳ نفر آن‌ها، مجاز به رانندگی باشند؟ *(انسانی داخل ۹۹)*

۱) ۶۰　　۲) ۷۲　　۳) ۷۵　　۴) ۸۴

از بین ۷ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم، می‌خواهیم یک تیم والیبال ۶ نفره تشکیل دهیم؛ (به سؤالات ۱۱۶ و ۱۱۷ پاسخ دهید.)

۱۱۶- اگر بخواهیم کاپیتان تیم، فرد مشخصی از پایهٔ دوازدهم باشد، این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

۱) ۴۹۶　　۲) ۵۶۴　　۳) ۶۰۸　　۴) ۷۹۲

۱۱۷- اگر بخواهیم کاپیتان تیم، فردی از پایه دوازدهم باشد، این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۱) ۳۳۴۴　　۲) ۴۴۵۵　　۳) ۵۵۴۴　　۴) ۶۶۵۵

۱۱۸- مقدار n از تساوی $P(n-2,4)=18\ P(n,5)$ کدام است؟

۱) ۸　　۲) ۱۰　　۳) ۱۲　　۴) ۱۴

۱۱۹- اگر $\frac{P(n,4)}{C_{4}^{n-1}}=26$، مقدار n کدام است؟

۱) ۵۲　　۲) ۵۳　　۳) ۵۴　　۴) ۵۵

۱۲۰- اگر $P(n,2)-C_{2}^{n}=28$ باشد، آن‌گاه حاصل C_{4}^{n} کدام است؟

۱) ۱۵　　۲) ۳۵　　۳) ۷۰　　۴) ۱۲۶

۱۲۱- به چند طریق می‌توان از بین هفت کتاب متمایز، ۳ کتاب انتخاب کرده و آن‌ها را در قفسه‌ای کنار هم بچینیم؟

۱) ۳۵　　۲) ۷۰　　۳) ۱۰۵　　۴) ۲۱۰

۱۲۲- با حروف کلمهٔ «TEHRAN» چند جایگشت ۴ حرفی می‌توان ساخت که شامل حرف «T» باشد؟

۱) ۱۲۰　　۲) ۲۴۰　　۳) ۳۶۰　　۴) ۳۸۰

۱۲۳- با ارقام متمایز ۱,۲,۳,۴,...,۹ به چند طریق می‌توان یک عدد چهار رقمی ساخت به‌طوری که فقط یکی از ارقام آن زوج باشد؟ *(ریاضی خارج ۹۴)*

۱) ۶۴۰　　۲) ۷۲۰　　۳) ۷۸۰　　۴) ۹۶۰

۱۲۴- فرض کنید مجموعه‌های A و B به‌صورت $A=\{1,2,3,4\}$ و $B=\{5,6,7\}$ باشند، به چند طریق می‌توان یک عدد سه رقمی ساخت به‌طوری که دو رقم از A و ۱ رقم از B در آن وجود داشته باشد؟

۱) ۶۲　　۲) ۸۴　　۳) ۱۰۸　　۴) ۱۲۶

فضای نمونه‌ای، پیشامد و احتمال وقوع آن

احتمال، علم اندازه‌گیری شانس است. ما در زندگی با آزمایش یا پدیده‌هایی مواجه هستیم که نتیجهٔ آن‌ها را قبل از اجرای آزمایش به‌طور قطع نمی‌دانیم. به این‌گونه از آزمایش‌ها یا پدیده‌ها «آزمایش تصادفی» می‌گوییم؛ مانند پرتاب یک سکه که نمی‌دانیم رو می‌آید یا پشت، یا پرتاب یک تاس که نمی‌دانیم کدام‌یک از اعداد ۱ تا ۶ ظاهر می‌شود. در این مبحث، شما باید چند اصطلاح را خوب یاد بگیرید:

آزمایش یا پدیدهٔ قطعی: آزمایش یا پدیده‌ای که نتیجهٔ آن از قبل معلوم است.

خورشید فردا طلوع می‌کند. (پدیدهٔ قطعی)

ظاهر شدن عدد طبیعی در پرتاب یک تاس (آزمایش قطعی)

آزمایش یا پدیدهٔ تصادفی: آزمایش یا پدیده‌ای که نتیجهٔ آن از قبل معلوم نیست.

پرتاب سکه، پرتاب تاس و ... .

فضای نمونه‌ای: به مجموعهٔ همهٔ نتایج ممکن در یک آزمایش تصادفی، فضای نمونه‌ای آن آزمایش می‌گوییم و آن را با حرف S نشان می‌دهیم. مثلاً:

فضای نمونه‌ای پرتاب یک سکه : $S = \{\text{پشت , رو}\} \Rightarrow n(S) = ۲$

فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس : $S = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶\} \Rightarrow n(S) = ۶$

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را با $n(S)$ نشان می‌دهیم.

برآمد: به هر یک از نتایج ممکن در یک آزمایش تصادفی، برآمد می‌گوییم. مثلاً اگر سؤال شود که پرتاب یک تاس چند برآمد (نتیجه) دارد، می‌گوییم ۶ برآمد (نتیجه) ممکن دارد.

نکته

اگر فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی m عضو داشته باشد، در صورتی‌که این آزمایش را n بار تکرار کنیم، تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای این n بار آزمایش برابر است با: $n(S) = m^n$

۳ تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای آزمایش‌های تصادفی زیر را به‌دست آورید.

الف) دو سکه را با هم پرتاب می‌کنیم (یا یک سکه را دو بار پرتاب می‌کنیم).

ب) سه سکه را با هم پرتاب می کنیم (یا یک سکه را سه بار پرتاب می‌کنیم).

ج) دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم (یا یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم).

د) سه تاس را با هم پرتاب می‌کنیم (یا یک تاس را سه بار پرتاب می‌کنیم).

هر بار پرتاب سکه ۲ حالت و هر بار پرتاب تاس ۶ حالت دارد. پس بنابر اصل ضرب داریم:

الف) $n(S) = ۲^۲ = ۴$ ب) $n(S) = ۲^۳ = ۸$

ج) $n(S) = ۶^۲ = ۳۶$ د) $n(S) = ۶^۳ = ۲۱۶$

نتیجه:

۱ اگر k سکه را با هم پرتاب کنیم (یا یک سکه را k بار پرتاب کنیم)، تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با: $n(S) = ۲^k$

۲ اگر k تاس را با هم پرتاب کنیم (یا یک تاس را k بار پرتاب کنیم)، تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با: $n(S) = ۶^k$

۴ در یک جعبه ۳ مهرهٔ قرمز متمایز و ۴ مهرهٔ سیاه متمایز وجود دارد. تعداد عناصر فضای نمونه‌ای آزمایش‌های تصادفی زیر را به‌دست آورید.

الف) از داخل جعبه ۱ مهره خارج می‌کنیم.

ب) از داخل جعبه ۲ مهره خارج می‌کنیم.

ج) از داخل جعبه ۳ مهره خارج می‌کنیم.

برای محاسبهٔ تعداد حالت‌های انتخاب k شیء از n شیء، که ترتیب انتخاب مهم نباشد، کافی است حاصل $\binom{n}{k}$ را بیابیم:

الف) $n(S) = C(۷ , ۱) = \binom{۷}{۱} = ۷$

ب) $n(S) = \binom{۷}{۲} = \frac{۷!}{(۷-۲)!۲!} = \frac{۷\times۶\times۵!}{۵!\times۲\times۱} = ۲۱$

ج) $n(S) = \binom{۷}{۳} = \frac{۷!}{(۷-۳)!۳!} = \frac{۷\times۶\times۵\times۴!}{۴!\times۳\times۲\times۱} = ۳۵$

پیشامد: به هر زیرمجموعه از مجموعهٔ فضای نمونه‌ای، یک پیشامد می‌گوییم. مثلاً پیشامد $A = \{۲, ۴, ۶\}$ یک زیرمجموعه از مجموعهٔ فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس است که می‌توان آن را این‌گونه تعریف کرد، پیشامد ظاهر شدن عدد زوج در پرتاب یک تاس.

نکته

ازآن‌جا که هر مجموعهٔ n عضوی دارای ۲^n زیرمجموعه است، پس تعداد پیشامدهای هر فضای نمونه‌ای برابر است با: $۲^{\text{تعداد برآمدها}}$ = تعداد پیشامدها

پرتاب یک تاس چند پیشامد دارد؟

از آن‌جا که پرتاب یک تاس ۶ برآمد (۶ نتیجهٔ ممکن) دارد، پس تعداد پیشامدها برابر است با: $۲^۶ = ۶۴$

یک تاس را پرتاب می‌کنیم. A پیشامد ظاهر شدن عدد اول و B پیشامد ظاهر شدن عدد مربع کامل را مشخص کنید.

$S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}, A = \{۲, ۳, ۵\}, B = \{۱, ۴\}$

اگر $S = \{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد، کدام مجموعهٔ زیر یک پیشامد از S است؟

۱) $\{۰, ۲\}$ ۲) $\{-۱, ۲, ۳\}$ ۳) $\{۰, ۱, ۴\}$ ۴) $\{-۱, ۰, ۱\}$

گزینهٔ «۴» صحیح است.

نکته

اگر نتیجهٔ آزمایش منجر به وقوع یکی از برآمدهای پیشامد مطلوب گردد، آن‌گاه می‌گوییم آن پیشامد رخ داده است.

فرض می‌کنیم $S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ و $A = \{۱, ۳, ۵\}$ یک پیشامد از فضای نمونه‌ای باشد. اگر نتیجهٔ آزمایش مثلاً عدد ۵ باشد (تاس را بیاندازیم و عدد ۵ ظاهر شود)، آن‌گاه می‌توانیم بگوییم پیشامد A رخ داده است. اما اگر مثلاً عدد ۴ ظاهر شود، پیشامد A رخ نداده است.

احتمال وقوع یک پیشامد

$$\text{احتمال وقوع هر پیشامد} = \frac{\text{تعداد اعضای آن پیشامد}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه‌ای}} \xRightarrow{\text{به زبان ریاضی}} P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

A، پیشامد مطلوب است که ما دوست داریم رخ بدهد و $n(A)$ تعداد اعضای آن پیشامد است.

نکته

اگر S یک فضای نمونه‌ای باشد، آن‌گاه $\varnothing$ و S دو پیشامد می‌باشند به‌طوری‌که $\varnothing$ را که احتمال وقوع آن صفر است و تحت هیچ شرایطی امکان وقوع ندارد، پیشامد نشدنی (غیرممکن) می‌گوییم (مانند ظاهر شدن عدد ۷ در پرتاب یک تاس). هم‌چنین S را که حتماً اتفاق می‌افتد و تحت هر شرایطی رخ می‌دهد (یعنی احتمال رخ دادن آن برابر ۱ یا به عبارت دیگر، امکان وقوع آن صد در صد است)، پیشامد حتمی می‌گوییم (مانند ظاهر شدن عدد طبیعی کوچک‌تر از ۷ در پرتاب یک تاس). بنابراین اگر A یک پیشامد دلخواه از فضای نمونه‌ای S باشد، آن‌گاه:

$$۰ = P(\varnothing) \le P(A) \le P(S) = ۱$$

عضوهای فضای نمونه‌ای هم‌شانس باشند، یعنی چی؟

هم‌شانس بودن عضوهای فضای نمونه‌ای، یعنی این‌که هر یک از اعضای S شانس مساوی برای وقوع داشته باشند. مثلاً در پرتاب یک تاس، احتمال ظاهر شدن اعداد ۱، ۲، ... و ۶ یکسان است. در این صورت می‌گوییم عضوهای فضای نمونه‌ای هم شانس هستند.

تفکر

مهم‌ترین مسئله در محاسبهٔ احتمال پیشامدها، پیدا کردن تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای یعنی $n(S)$ و بعد از آن، یافتن تعداد عضوهای پیشامد، یعنی $n(A)$ می‌باشد.

در پرتاب یک تاس، با کدام احتمال، عدد رو شده زوج است؟

$$\left.\begin{array}{l} \text{فضای نمونه‌ای}: S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\} \Rightarrow n(S) = ۶ \\ \text{پیشامد مطلوب}: A = \{۲, ۴, ۶\} \Rightarrow n(A) = ۳ \end{array}\right\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی دارای سه برآمد هم‌شانس است. احتمال وقوع دومین برآمد کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

گزینهٔ «۳»؛ چون هر سه برآمد هم‌شانس هستند، پس احتمال وقوع هر کدام $\frac{۱}{۳}$ است.

۱۷- تعداد کسانی که به یک پرسش مطرح شده پاسخ درست داده‌اند، مطابق جدول مقابل از لحاظ جنسیت و سن دسته‌بندی شده‌اند. اگر فقط یک جایزه به یکی از آن‌ها داده شود، با کدام احتمال این فرد، مرد و بیشتر از ۳۰ سال سن دارد؟ *(انسانی داخل ۸۷)*

	مرد	زن
بیشتر از ۳۰ سال	۴۸	۳۵
کمتر از ۳۰ سال	۸۲	۷۵

۱) ۰/۱۶   ۲) ۰/۱۸   ۳) ۰/۲۰   ۴) ۰/۲۵

۱۸- جدول مقابل تعداد لامپ‌های موجود ۶۰ وات و ۱۰۰ وات از تولیدات دو کارخانهٔ A و B است. اگر یک لامپ به تصادف برداشته شود، با کدام احتمال، این لامپ ۱۰۰ وات است؟ *(انسانی داخل ۹۰)*

	۱۰۰	۶۰
A	۱۳	۲۰
B	۳۴	۲۲

۱) $\frac{۷}{۱۵}$ ۲) $\frac{۸}{۱۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

۱۹- اعداد طبیعی ۱ تا ۳۰ را روی کارت‌های یکسان نوشته و به‌طور تصادفی، یک کارت از بین آن‌ها بیرون می‌کشیم. با کدام احتمال، عدد نوشته شده روی کارت مضرب ۳ است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۲۰- اعداد طبیعی ۴۱ ,... ,۲۲ ,۲۱ را بر روی کارت‌های یکسان نوشته و به‌طور تصادفی یک کارت از بین آن‌ها بیرون می‌کشیم. با کدام احتمال، عدد نوشته شده روی کارت مضرب ۳ است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۷}$

۲۱- اگر تمام اعداد دو رقمی روی کارت‌های مختلف نوشته شده باشد و یک کارت از میان آن‌ها به تصادف برداریم، احتمال آن‌که هر دو رقم عدد روی کارت انتخابی، ۳ باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۹۰}$ ۲) $\frac{۱}{۸۹}$ ۳) $\frac{۱}{۹۹}$ ۴) $\frac{۱}{۱۰۰}$

۲۲- یک عدد چهار رقمی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که هر چهار رقم آن مساوی باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۹}{۸۹۹۹}$ ۲) ۰/۰۰۰۹   ۳) ۰/۰۰۱   ۴) $\frac{۱}{۹۰۰}$

۲۳- از بین ۲۰ کارت یکسان که اعداد ۱ تا ۲۰ بر روی آن‌ها نوشته شده است، دو کارت با شماره‌های زوج را کنار می‌کشیم، از بین بقیه، به تصادف یک کارت بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، عدد این کارت زوج است؟ *(انسانی داخل ۹۵)*

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۷}{۱۸}$

هریک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۴، ۳، ۲، و ۱ می‌توان نوشت، روی کارت‌هایی می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، یک کارت را به‌تصادف خارج می‌کنیم. (به سؤالات ۲۴ و ۲۵ پاسخ دهید): *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

۲۴- با کدام احتمال، عدد روی کارت، اول است؟

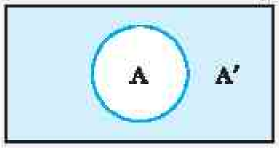
۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۱۶}$ ۴) $\frac{۵}{۱۶}$

۲۵- با کدام احتمال، عدد روی کارت، مضرب ۶ است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۱۶}$ ۴) $\frac{۵}{۱۶}$

احتمال پیشامد متمم

اگر A یک پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشد، آن‌گاه متمم A را با A' نشان می‌دهند. $P(A)$ احتمال واقع شدن پیشامد A است و $P(A')$ احتمال رخ ندادن پیشامد A می‌باشد و رابطهٔ زیر بین این دو پیشامد برقرار است:



$$A \cup A' = S \quad و \quad A \cap A' = \varnothing$$

$$P(A)+P(A')=۱ \Rightarrow \boxed{P(A)=۱-P(A')}$$

۶ اگر $S=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ فضای نمونه‌ای و $A=\{۱,۲\}$ پیشامدی از S باشد، $P(A')$ چقدر است؟

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۵} \Rightarrow P(A')=۱-\frac{۲}{۵}=\frac{۳}{۵}$$

۶ تاس سالمی را پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد رخ دادن عدد مضرب ۳ باشد، $P(A')$ چقدر است؟

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \quad , \quad A=\{۳,۶\} \Rightarrow P(A)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow P(A')=۱-P(A)=۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

۱۰ (۲)

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}\Rightarrow\frac{24}{100}=\frac{6}{n(S)}\Rightarrow n(S)=\frac{6\times100}{24}=25$$

۱۱ (۲) منظور از حداقل ۳ آمدن در پرتاب یک تاس، یعنی ظاهر شدن عدد ۳ یا اعداد بیشتر از ۳، یعنی ۴ یا ۵ یا ۶ که احتمال وقوع آن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$A=\{3,4,5,6\}\Rightarrow n(A)=4\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

۱۲ (۳)

تذکر: هرگاه بخواهیم درصد یک نسبت را به‌دست آوریم، کافی است آن نسبت را در عدد ۱۰۰ ضرب کنیم.

اگر A را پیشامد این‌که عدد رو شده، عددی اول باشد، در نظر بگیریم، داریم:

$$A=\{2,3,5\}\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\Rightarrow \text{درصد احتمال}=\frac{1}{2}\times100=50\%$$

ان‌شاالله حواستون هست که عدد ۱ نه اول است و نه مرکب.

۱۳ (۲) می‌دانیم که $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ می‌باشد و چون در این مسئله $P(A)$ و $n(A)$ معلوم است، $n(S)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}\Rightarrow\frac{2}{10}=\frac{8}{n(S)}\Rightarrow n(S)=\frac{8\times10}{2}=40$$

بنابراین داریم:

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}\Rightarrow P(B)=\frac{5}{40}=\frac{1}{8}$$

۱۴ (۱)

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}\Rightarrow\frac{4}{10}=\frac{12}{n(S)}\Rightarrow n(S)=\frac{10\times12}{4}=30$$

بنابراین داریم:

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}\Rightarrow\frac{1}{6}=\frac{n(B)}{30}\Rightarrow n(B)=\frac{30\times1}{6}=5$$

۱۵ (۴) می‌دانیم که پدیدهٔ غیر ممکن، پدیده‌ای است که احتمال وقوع آن صفر باشد. بنابراین گزینهٔ «۴» نادرست است.

گزینهٔ «۲» رو هم با یک مثال توضیح می‌دم. فرض کنید یک تاس سالم را پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد ۸ بیاد برابر صفره، چون ۸ در بین اعداد تاس وجود نداره و خارج از فضای نمونه‌ای است، بنابراین آمدن عدد ۸ در پرتاب یک تاس، یک پدیدهٔ غیرممکن است.

۱۶ (۱) فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی، مجموعهٔ تمام نتایج ممکن در یک آزمایش تصادفی است. [درستی گزینهٔ «۲»]

اجتماع تمام برآمدهای ممکن برای یک آزمایش تصادفی، برابر با فضای نمونه‌ای است. [درستی گزینهٔ «۴»]

با در نظر گرفتن فضای نمونه‌ای S به‌صورت مقابل داریم: $S=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}\Rightarrow P(a_1)+P(a_2)+\dots+P(a_n)=1$

از آن‌جا که مجموع احتمالات تمامی برآمدها برابر ۱ است، پس حداکثر یکی از پیشامدها (خود فضای نمونه‌ای) می‌تواند احتمال وقوع برابر ۱ داشته باشد. [درستی گزینهٔ «۳»]

اما ممکن است احتمال وقوع هیچ‌یک از برآمدهای فضای نمونه‌ای صفر نباشد، مثل برآمدهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ در پرتاب یک تاس سالم. [نادرستی گزینهٔ «۱»]

۱۷ (۳) طبق جدول، تعداد کل افراد (تعداد اعضای فضای نمونه‌ای) برابر است با: $n(S)=35+48+75+82=240$

تعداد ۴۸ نفر آن‌ها مرد بالای ۳۰ سال سن هستند. پس احتمال مطلوب برابر است با:

$$P(A)=\frac{\text{تعداد مردان بالای ۳۰ سال}}{\text{تعداد کل افراد}}=\frac{48}{240}=\frac{1}{5}=0/2=0/20$$

۱۸ (۲) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای، برابر با تعداد کل لامپ‌ها است:

$$\text{تعداد اعضای فضای نمونه‌ای}=n(S)=20+22+14+34=90$$

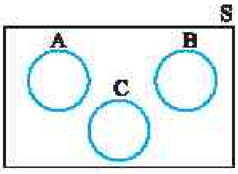
حالت مطلوب آن است که لامپ انتخابی، ۱۰۰ وات باشد و تعداد لامپ‌های ۱۰۰ واتی برابر $14+34=48$ است، بنابراین:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{48}{90}=\frac{8}{15}$$

۱۹ (۴) می‌دانیم که فضای نمونه‌ای عبارت است از $S=\{1,2,\dots,30\}$ که تعداد اعضای آن $n(S)=30$ می‌باشد. پیشامد این‌که عدد روی کارت خارج شده مضرب ۳ باشد، عبارت است از $A=\{3,6,9,\dots,30\}$ که تعداد اعضای آن $n(A)=10$ می‌باشد، بنابراین احتمال وقوع پیشامد A برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$$

۴۱ **۴** کافی است طرفین تساوی‌های داده شده را با هم جمع کنیم:



$$\begin{cases} P(A)+P(B)=\frac{3}{16} \\ P(B)+P(C)=\frac{1}{4} \\ P(A)+P(C)=\frac{3}{8} \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع سه رابطه با هم}} 2P(A)+2P(B)+2P(C)=\frac{3}{16}+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow 2(P(A)+P(B)+P(C))=\frac{3+4+6}{16}=\frac{13}{16}\Rightarrow 2P(A\cup B\cup C)=\frac{13}{16}\Rightarrow P(A\cup B\cup C)=\frac{\frac{13}{16}}{2}=\frac{13}{32}$$

۴۲ **۳** **بررسی سایر گزینه‌ها:**

گزینهٔ «۱»: پیشامد A ، B و C رخ دهند را نشان می‌دهد: $(A\cap B\cap C)$

گزینهٔ «۲»: پیشامد A و B رخ دهند و پیشامد C رخ ندهد: $(A\cap B)-C$

گزینهٔ «۴»: پیشامد A یا B رخ دهند و پیشامد C رخ ندهد: $(A\cup B)-C$

۴۳ **۴** شکل داده شده به وضوح نشان می‌دهد که قسمت اشتراک دو پیشامد A و B $(A\cap B)$ رخ نداده است یعنی پیشامدهای A و B رخ ندهند.

۴۴ **۲** پیشامد گفته شده همان $(A\cup B)-C$ است. یعنی از $A\cup B$ قسمت اشتراکی با C حذف شود.

۴۵ **۴** فقط B رخ دهد به معنای آن است که B رخ دهد و A رخ ندهد (یعنی $B-A$) و چون A و B سازگار هستند، پس اشتراک هم دارند. (در گزینهٔ «۳»، چون A و B اشتراکی ندارند، پس نادرست است.)

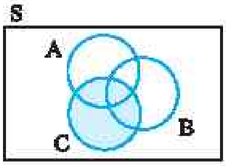
۴۶ **۱** نمودار، گزینهٔ «۱» را نشان می‌دهد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

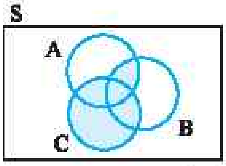
گزینهٔ «۲»: فقط A و فقط B یعنی:

$$\left.\begin{matrix} A\text{فقط}=A-(B\cup C) \\ B\text{فقط}=B-(A\cup C) \end{matrix}\right\}\Rightarrow (A\text{فقط})\cap(B\text{فقط})=(A-(B\cup C))\cap(B-(A\cup C))=\varnothing$$

بنابراین نمودار ون آن به‌صورت مقابل است:



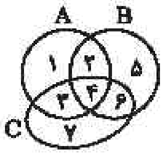
گزینهٔ «۳»: با توضیحات گفته شده، نمودار ون آن به‌صورت مقابل است:



گزینهٔ «۴»:

$$\left.\begin{matrix} A\text{فقط}=A-(B\cup C) \\ B\text{فقط}=B-(A\cup C) \end{matrix}\right\}\Rightarrow \underbrace{(B\text{فقط}\cap A\text{فقط})}_{\varnothing}\cap(C)=\varnothing$$

۴۷ **۴** روش اول: مجموعه‌های A ، B و C را با اعضای فرضی می‌نویسیم:



$A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{2,4,5,6\} \Downarrow B'=\{1,3,7\}$ $C=\{3,4,6,7\} \Downarrow C'=\{1,2,5\}$

مجموعهٔ سایه‌زده شده شامل اعضای $\{1,2,3\}$ است. حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ «۱»: $(A-B)\cup(A-C)=\{1,3\}\cup\{1,2\}=\{1,2,3\}$ ✓

گزینهٔ «۲»: $A\cap(B'\cup C')=\{1,2,3,4\}\cap(\{1,3,7\}\cup\{1,2,5\})=\{1,2,3,4\}\cap\{1,2,3,5,7\}=\{1,2,3\}$ ✓

گزینهٔ «۳»: $A-(B\cap C)=\{1,2,3,4\}-\{4,6\}=\{1,2,3\}$ ✓

گزینهٔ «۴»: $A-(B\cup C)=\{1,2,3,4\}-\{2,3,4,5,6,7\}=\{1\}$ ✗

بنابراین مجموعهٔ سایه‌زده شده با مجموعهٔ حاصل از $A-(B\cup C)$ برابر نیست. (پس گزینهٔ «۴» صحیح است.)

۵۵ **۴** برای حل این سؤال از پیشامد متمم استفاده می‌کنیم. عبارت لااقل یکی از شماره‌ها ۲ باشد به معنای آن است که یا یکی از شماره‌ها یا هر دوی آن‌ها ۲ باشد و پیشامد متمم (نامطلوب) آن است که هیچ‌یک از شماره‌ها ۲ نباشد.

لااقل یکی از شماره‌ها ۲ باشد: A

A': هیچ‌یک از شماره‌ها ۲ نباشد: $A' \Rightarrow$ $\underbrace{\text{گوی اول عددی غیر از ۲ باشد}}_{\text{می‌تواند ۱، ۳، ۴ یا ۵ باشد.}}$ و $\underbrace{\text{گوی دوم عددی غیر از ۲ باشد}}_{\text{می‌تواند ۱، ۳ یا ۴ باشد.}}$

$$P(A')=\frac{۴}{۵}\times\frac{۳}{۴}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۳}{۵}=\frac{۲}{۵}=۰/۴$$

۵۶ **۲** برای حل این سؤال باید از پیشامد متمم استفاده کنیم:

A : پیشامد آن‌که لااقل شمارهٔ یکی از دو کارت زوج باشد. (یعنی یکی از شماره‌ها زوج باشد یا هر دوی شماره‌ها زوج باشد.)

A' : پیشامد آن‌که هیچ‌کدام از شماره‌های دو کارت زوج نباشد. (یعنی آن‌که هر دو شماره فرد باشند.)

$A' =$ شماره‌های هر دو کارت فرد باشند. $=$ شمارهٔ کارت اولی فرد باشد و شمارهٔ کارت دومی فرد باشد.

در سری الف از ۵ کارت، ۳ کارت شمارهٔ فرد دارند، پس احتمال آن‌که شمارهٔ کارت سریال الف فرد باشد، $\frac{۳}{۵}$ است. از سری ب از ۴ کارت، ۲ کارت شمارهٔ فرد دارند، پس احتمال آن‌که شمارهٔ کارت سریال ب فرد باشد، $\frac{۲}{۴}$ است.

$$P(A')=\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۴}=\frac{۶}{۲۰}=\frac{۳}{۱۰}\Rightarrow P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۳}{۱۰}=\frac{۷}{۱۰}=۰/۷$$

۵۷ **۳** از پیشامد متمم استفاده می‌کنیم:

A : پیشامد آن‌که لااقل یکی از عقربه‌ها روی ناحیهٔ فرد قرار گیرد.

A' : پیشامد آن‌که هیچ‌کدام از عقربه‌ها روی ناحیهٔ فرد قرار نگیرد که معادل آن است که هر دو عقربه روی ناحیهٔ زوج قرار گیرد.

حال برای محاسبهٔ احتمال وقوع پیشامد A'، می‌توانیم به دو طریق عمل کنیم:

روش اول: پیشامد مستقل:

$$\left.\begin{array}{r}\text{احتمال آن‌که عقربهٔ A روی ناحیهٔ زوج بایستد.}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}\\ \text{احتمال آن‌که عقربهٔ B روی ناحیهٔ زوج بایستد.}=\frac{۲}{۵}\end{array}\right\}\Rightarrow P(A')=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۱}{۵}=\frac{۴}{۵}=۰/۸$$

روش دوم: پیشامد مرکب، تعداد حالاتی که هر دو عقربه روی اعداد زوج می‌ایستند را می‌یابیم:

$$A'=\{(۲,۲),(۲,۴),(۴,۲),(۴,۴)\}\Rightarrow n(A')=۴\Rightarrow P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{۴}{۲۰}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow P(A)=۱-\frac{۱}{۵}=\frac{۴}{۵}=۰/۸$$

۵۸ **۳** ۳ عدد ۲، ۳ و ۵ اعداد اول در پرتاب تاس هستند:

$$\left.\begin{array}{r}\text{احتمال آن‌که تاس عدد اول ظاهر شود.}=\frac{۳}{۶}\\ \text{احتمال آن‌که سکه «رو» ظاهر شود.}=\frac{۱}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{۳}{۶}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

۵۹ **۴** وقتی قرار است در پرتاب سوم برای اولین بار عدد ۴ ظاهر شود، به معنای آن است که در دو پرتاب اول، عدد ۴ ظاهر نشده است. (یعنی پرتاب اول ۴ نیامده، پرتاب دوم ۴ نیامده و پرتاب سوم ۴ آمده است):

$$n(A)=\underbrace{۵}_{\substack{\text{تمام حالات به‌جز ۴}\\\{۱,۲,۳,۵,۶\}}}\times\overset{\substack{\text{تمام حالات به‌جز ۴}\\\{۱,۲,۳,۵,۶\}}}{۵}\times\underbrace{۱}_{\substack{\text{فقط عدد ۴}\\\{۴\}}}=۲۵$$

۶۰ **۳**

$$P(A)=\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}\times۴=\frac{۱}{۴^۲}=\frac{۱}{۱۶}$$

۶۱ **۴** می‌دانیم که نفر اول در هر یک از ۱۲ ماه سال می‌توانسته متولد شده باشد و چون باید ماه تولد نفر دوم با نفر اول متفاوت باشد، نفر دوم در ۱۱ ماه باقی‌مانده می‌توانسته به دنیا بیاید و همچنین چون ماه تولد نفر سوم باید متفاوت با ماه‌های تولد دو نفر قبلی باشد، بنابراین نفر سوم در ۱۰ ماه باقی‌مانده می‌توانسته به دنیا بیاید. همچنین ماه تولد نفر چهارم با ماه تولد سه نفر قبلی باید متفاوت باشد، بنابراین نفر چهارم در ۹ ماه باقی‌مانده می‌توانسته متولد شود. پس احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(A)=\frac{\cancel{۱۲}\times۱۱\times۱۰\times۹}{\cancel{۱۲}\times۱۲\times۱۲\times۱۲}=\frac{۱۱\times۱۰\times۹}{۱۲^۳}$$

۶۲ **۳**

$$P(A)=\frac{\cancel{۳۶۵}\times۳۶۴\times۳۶۳\times۳۶۲}{\cancel{۳۶۵}\times۳۶۵\times۳۶۵\times۳۶۵}=\frac{۳۶۴\times۳۶۳\times۳۶۲}{(۳۶۵)^۳}$$

۱۲۲ [۲] روش اول: می‌توان گفت در مجموع ۲ کارت خارج کردیم، پس فضای نمونه‌ای، انتخاب ۲ کارت از ۵ کارت است:

$$n(S)=\binom{5}{2}=\frac{5!}{3!2!}=\frac{5\times4\times3!}{3!\times2}=10$$

حال می‌خواهیم اعداد، متوالی باشد یعنی حالات:

$(1,2),(2,3),(3,4),(4,5) \Rightarrow$ حالت است. ۴ $\Rightarrow P(A)=\frac{4}{10}=0/4$

روش دوم: برای کارت‌های انتخابی، ترتیب قائل می‌شویم. کارت‌ها را یکی پس از دیگری و بدون جایگذاری خارج کرده‌ایم. یعنی کارت اول از بین ۵ کارت و کارت دوم از بین ۴ کارت باقی‌مانده خارج شده است، پس:

$$n(S)=\binom{5}{1}\times\binom{4}{1}=20$$

برای این‌که ارقام کارت‌ها متوالی باشند، باید کارت‌ها را به یکی از ۸ صورت زیر بیرون کشیده باشیم:

$$\boxed{1}\boxed{2},\ \boxed{2}\boxed{1},\ \boxed{2}\boxed{3},\ \boxed{3}\boxed{2},\ \boxed{3}\boxed{4},\ \boxed{4}\boxed{3},\ \boxed{4}\boxed{5},\ \boxed{5}\boxed{4} \Rightarrow n(A)=8$$

بنابراین احتمال این‌که ارقام کارت‌ها متوالی باشند، برابر با $P(A)=\frac{8}{20}=0/4$ است.

۱۲۳ [۳] فضای نمونه‌ای، انتخاب ۲ مهره از ۵ مهره است:

$$n(S)=\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!3!}=\frac{5\times4\times3!}{2\times3!}=10$$

حالاتی که مجموع دو شماره بزرگ‌تر از ۵ باشد، برابر است با:

$$(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5) \Rightarrow n(A)=6 \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{10}=0/6$$

ممکن است براتون این سؤال پیش بیاد که اگر مثلاً حالت (1,5) رو داریم، چرا حالت (5,1) رو در نظر نمی‌گیریم؟

جواب این سؤال این است که ما فضای نمونه‌ای را با ترکیب حل کردیم (یعنی برای بیرون آمدن مهره ترتیب قائل نشدیم)، پس برای صورت کسر یعنی حالات مطلوب هم نباید ترتیب قائل شویم. البته می‌توان برای فضای نمونه‌ای ترتیب قائل شد، آن‌گاه برای حالات مطلوب هم ترتیب قائل می‌شویم:

$$\begin{cases} n(S)=5\times4=20 \\ n(A)=6\times2=12 \end{cases} \Rightarrow P(A)=\frac{12}{20}=\frac{6}{10}=0/6$$

هر حالت ۲ برابر می‌شود؛ یعنی مثلاً (1,5) و (5,1) و...

۱۲۴ [۱] فضای نمونه‌ای، انتخاب ۲ گوی از ۶ گوی است:

$$n(S)=\binom{6}{2}=\frac{6!}{4!2!}=\frac{6\times5\times4!}{4!\times2}=15$$

حالاتی که مجموع اعداد دو گوی کمتر از ۶ باشد، عبارتند از (1,2)، (1,3)، (1,4)، (2,3) یعنی ۴ حالت،

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{\binom{6}{2}}=\frac{4}{15}$$

۱۲۵ [۲] فضای نمونه‌ای، انتخاب ۲ مهره از ۶ مهره است:

$$n(S)=\binom{6}{2}=\frac{6!}{4!2!}=\frac{6\times5\times4!}{4!\times2}=15$$

حالاتی که مجموع دو عدد انتخابی مضرب ۳ می‌گردد (یعنی ۳ یا ۶ یا ۹)، شامل ۵ حالت (1,2)، (1,5)، (2,4)، (3,6)، (4,5) می‌باشد یا می‌توان گفت:

$$1,2,3,4,5,6$$

یعنی به‌جای نوشتن حالات بالا، از فلش‌ها استفاده کردیم. پس در نتیجه:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{5}{\binom{6}{2}}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$

۱۲۶ [۳] فضای نمونه‌ای، انتخاب ۲ کارت از ۵ کارت است:

$$n(S)=\binom{5}{2}=10$$

حال می‌خواهیم مجموع دو عدد، زوج گردد. خب! ابتدا باید بدانیم در چه مواقعی مجموع دو عدد زوج می‌شود:

حالت اول: زوج + زوج = زوج   حالت دوم: زوج + فرد = فرد   حالت سوم: فرد + فرد = زوج

پس باید یا هر دو عدد انتخابی زوج یا هر دو عدد انتخابی فرد باشند. در بین ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵، سه رقم فرد و دو رقم زوج داریم:

$$n(A)=\underbrace{\binom{2}{2}}_{\text{هر دو زوج}}+\underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{هر دو فرد}}=1+3=4 \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{10}=0/4$$

روش‌های گردآوری داده‌ها

۱ **مشاهده (آزمایش):** گردآوری داده‌ها بدون نیاز به فرد پاسخگو، مانند: شمارش تعداد وسایل نقلیه عبوری از یک تقاطع، تأثیر نور خورشید بر رشد گیاه، اندازه‌گیری وزن محصولات یک زمین کشاورزی

۲ **پرسش‌نامه:** مجموعه‌ای از سؤالات پیش تعیین شده که توسط تعدادی پاسخ‌دهنده تکمیل می‌گردد. پرسش‌نامه، مرسوم‌ترین ابزار گرفتن اطلاعات است. مانند: سرشماری نفوس و مسکن توسط مرکز آمار ایران (هر ۱۰ سال یک‌بار)، پرسش‌نامه در هنگام ثبت‌نام در مدرسه.

۳ **مصاحبه:** یکی از روش‌های جمع‌آوری اطلاعات است که در آن به‌صورت حضوری یا غیرحضوری از افراد یا گروهی از آنان پرسش می‌شود. این روش بیشتر زمانی استفاده می‌شود که آمارگیر (مصاحبه‌گر) اطلاع کافی از تمامی پاسخ‌های ممکن ندارد. امکان دریافت پاسخ در این روش بیشتر از روش‌های دیگر است. مانند: دریافت نظرات مردم در مورد اقدام جدید دولت در موضوعی خاص.

۴ **دادگان (داده‌های از پیش تهیه شده):**

در این روش می‌توان از اطلاعاتی که از قبل جمع‌آوری شده است استفاده کرد. مانند متوسط تعداد مسافرین ورودی روزانه به فرودگاه امام خمینی (ره).

دقت کنید که ممکن است برای گردآوری اطلاعات در مورد یک مسئله، چند روش قابل انجام باشد امّا به دنبال بهترین روش جمع‌آوری اطلاعات در هر زمینه‌ای هستیم.

اشکالات روش‌های گردآوری داده‌ها

۱ **پرسش‌نامه:** اگر تعداد واحدهای نمونه زیاد باشد، این روش زمان بر است.

۲ **مشاهده:** اگر به دقت زیاد نیاز داشته باشیم، مناسب نیست.

۳ **دادگان:** همیشه اطلاعات ثبتی را در اختیار آمارگیر قرار نمی‌دهند.

پارامتر جامعه: مشخصه عددی است که توصیف‌کننده جنبه‌ای خاص از **جامعه** است و از داده‌های جامعه به‌دست می‌آید.

آماره نمونه: مشخصه عددی است که توصیف‌کننده جنبه‌ای خاص از **نمونه** است و از داده‌های نمونه به‌دست می‌آید.

مثلاً میانگین اجاره بهای آپارتمان‌های دو خوابه در یک شهر معین یک پارامتر است و حال فرض کنید ما در این شهر ۱۰۰ آپارتمان دو خوابه را به‌عنوان نمونه و به‌طور تصادفی از مناطق مختلف شهر انتخاب می‌کنیم. میانگین اجاره‌بهای این ۱۰۰ آپارتمان اخیر یک آماره است. حال اگر یک نمونه ۵۰تایی دیگر از آپارتمان‌های همین شهر را، مجدداً از لحاظ اجاره بها بررسی کنیم باز یک آماره دیگر خواهیم داشت.

(توجه کنید که ممکن است عددی که برای آماره گروه اول به‌دست می‌آید با آماره گروه دوم یکسان نباشد.)

به عنوان مثالی دیگر، فرض کنید قرار است درباره دبیران استان کرمان یک پژوهش آماری انجام گیرد. اگر داده‌های مربوط به تک‌تک دبیران را داشته باشیم، یعنی به داده‌های جامعه دسترسی داریم و یک ویژگی این جامعه (مثلاً نسبت مردان در کل جامعه دبیران استان کرمان) معرف یک پارامتر است.

$$\text{پارامتر جامعه} = \frac{\text{تعداد اعضا از یک ویژگی خاص جامعه}}{\text{تعداد کل اعضای جامعه}}$$

حال اگر از بین آن دبیران یک نمونه‌گیری انجام گیرد. یعنی داده‌های بعضی از دبیران را داشته باشیم (یعنی داده‌های نمونه را در اختیار داریم) نسبت دبیران مرد به این داده های نمونه‌ای را آماره (مقدار آماره) می‌گویند.

$$\text{آمارهٔ نمونه} = \frac{\text{تعداد اعضا از یک ویژگی خاص نمونه}}{\text{تعداد کل اعضای نمونه}}$$

تفاوت پارامتر و آماره: پارامتر جامعه مقداری ثابت و پایدار است و تا موقعی که خود جامعه تغییر نکند، پارامتر جامعه تغییر نمی‌کند. امّا آماره مقداری متغیر و ناپایدار است. بدین معنی که از یک نمونه به نمونهٔ دیگر ممکن است تغییر کند. مثلاً اگر ما ۳ نمونه تصادفی ۵۰تایی از اجاره‌بهای آپارتمان‌های دوخوابه را در یک شهر معین بررسی کنیم، احتمالاً به سه عدد متفاوت می‌رسیم.

پارامتر یک جامعه زمانی قابل محاسبه است که داده‌های کل جامعه را در اختیار داشته باشیم. به همین دلیل پارامترها معمولاً برآورد می‌شوند. به‌خصوص زمانی که جامعهٔ آماری بزرگ باشد که در این‌صورت چون آماره کمیتی است که از یک نمونه به‌دست می‌آید، از آن به‌عنوان برآوردگر تخمینی پارامتر جامعه استفاده می‌شود.

۱۱- کدام گزینه در مورد روش جمع‌آوری داده‌ها صحیح است؟

۱) در جمع‌آوری داده‌ها، نباید از اطلاعات از پیش تهیه شده استفاده کرد.

۲) مشاهده، آزمایش و اندازه‌گیری یکی از روش‌های جمع‌آوری داده‌ها می‌باشد.

۳) در طراحی پرسش‌نامه، از سؤالات هدایت‌کننده می‌توان استفاده کرد.

۴) از روش مصاحبه، بیشتر در زمانی استفاده می‌شود که آمارگیر اطلاع کافی از تمامی پاسخ‌ها داشته باشد.

۱۲- در هر مورد، بهترین روش برای جمع‌آوری داده‌ها، کدام است؟

الف) تعداد داوطلبان کنکور ۱۳۹۷ رشتهٔ انسانی با سن کمتر از ۱۸ سال

ب) میزان رضایت سرنشینان خودرو از کیفیت جاده‌ها در سطح شهر

ج) بررسی کیفیت محصولات یک باغ میوه

د) بررسی ارتباط بین وزن افراد و رژیم غذایی آن‌ها

۱) دادگان، مصاحبه یا پرسش‌نامه، پرسش‌نامه، مشاهده

۲) دادگان، مصاحبه یا پرسش‌نامه، مشاهده، پرسش‌نامه

۳) مشاهده، مصاحبه، مشاهده، مصاحبه

۴) مصاحبه، پرسش‌نامه، مشاهده، پرسش‌نامه

۱۳- در مورد گردآوری داده‌ها، کدام بیان درست است؟ *(انسانی داخل ۹۸)*

۱) علم آمار نحوهٔ گردآوری، سازمان‌دهی، تحلیل و تفسیر اطلاعات است.

۲) یک روش آماری مناسب می‌تواند دقیق‌تر از داده‌ها و حقایق اصلی باشد.

۳) دادگان‌ها همیشه اطلاعات ثبتی را در اختیار آمارگر قرار می‌دهند.

۴) عدد آماره همواره کوچک‌تر از عدد پارامتر است.

۱۴- علی‌رغم این‌که پارامتر جامعه دارای مقدار .... است، این مقدار .... می‌باشد. به همین دلیل از .... برای تخمین .... استفاده می‌کنند.

۱) ثابت، مجهول، آماره، پارامتر

۲) متغیر، معلوم، آماره، پارامتر

۳) متغیر، معلوم، پارامتر، آماره

۴) ثابت، مجهول، پارامتر، آماره

۱۵- در یک جامعه آماری، کدام مشخصه عددی، درست است؟ *(انسانی خارج ۹۸)*

۱) پارامتر ثابت و آماره ثابت ۲) پارامتر ثابت و آماره متغیر ۳) پارامتر متغیر و آماره ثابت ۴) پارامتر متغیر و آماره متغیر

۱۶- تعداد تولیدات هفتگی یک کارخانهٔ خودروسازی، ۱۰۰۰ عدد می‌باشد. جهت بررسی کیفیت محصولات تولیدی کارخانه، ۲۰۰ خودرو را به تصادف انتخاب کرده و متوجه می‌شویم ۴۰ تای آن‌ها نقص فنی دارند. تعداد اعضای جامعه، تعداد اعضای نمونه، متغیر تصادفی و نوع آن کدام است؟

۱) ۱۰۰۰، ۲۰۰، تعداد تولیدات هفتگی کارخانه، کمی با مقیاس نسبتی

۲) ۲۰۰، ۴۰، تعداد تولیدات هفتگی کارخانه، کمی با مقیاس نسبتی

۳) ۱۰۰۰، ۲۰۰، کیفیت تولیدات کارخانه، کیفی با مقیاس اسمی

۴) ۲۰۰، ۴۰، کیفیت تولیدات کارخانه، کیفی با مقیاس اسمی

۱۷- تعداد کارمندان یک شرکت با مدارک دیپلم، لیسانس و فوق لیسانس به ترتیب ۲۰۰، ۷۰۰ و ۱۰۰ نفر می‌باشند. جهت بررسی وضعیت تحصیلی کارمندان، ۲۸۰ کارمند که $\frac{۳}{۴}$ آن‌ها مدرک تحصیلی غیر از لیسانس دارند، انتخاب می‌کنیم. نسبت پارامتر جامعه به آماره برای کارمندان با مدرک لیسانس در نمونهٔ انتخابی کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۱۴}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۷}{۳}$

۱۸- در یک مزرعهٔ هندوانه، ۲۰۰۰ هندوانه موجود است. می‌خواهیم آن‌ها را بر اساس معیار «وزن» بررسی کنیم (سبک، متوسط و سنگین). نسبت هندوانه‌های سبک و متوسط به کل هندوانه‌ها برابر $\frac{۱۱۰۰}{۲۰۰۰}$ می‌باشد. حال ۸۰۰ هندوانه به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. نسبت تعداد هندوانه‌های سنگین در این حالت برابر $\frac{۳۰۰}{۸۰۰}$ می‌باشد. نسبت پارامتر به آماره برای هندوانه‌های سنگین و غیرسنگین در نمونهٔ انتخابی کدام است؟

۱) $\frac{۳۰}{۲۵}, \frac{۲۲}{۲۵}$ ۲) $\frac{۲۵}{۲۲}, \frac{۲۵}{۳۰}$ ۳) $\frac{۲۲}{۲۵}, \frac{۳۰}{۲۵}$ ۴) $\frac{۲۵}{۳۰}, \frac{۲۵}{۲۲}$

۱۹- اطلاعاتی که در مورد یک موضوع، مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرند، .... نام دارد و به شخصی که وظیفهٔ تهیهٔ این اطلاعات را بر عهده دارد، .... گوییم.

۱) نمونه‌گیری، آمارگیر ۲) داده، دادگان ۳) نمونه‌گیری، دادگان ۴) داده، آمارگیر

۲۰- کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد علم آمار صحیح **نمی‌باشد**؟

۱) با استفاده از روش‌های آماری، به تنهایی نمی‌توان در مورد جامعه‌ای تصمیم‌گیری کرد.

۲) روش‌های آماری ما را قادر می‌سازند تا با داشتن اطلاعات از مجموعه‌های کوچک، برای گروه‌های بزرگ‌تر تصمیم‌گیری کنیم.

۳) مراحل مختلف علم آمار شامل گردآوری، سازمان‌دهی و تحلیل و تفسیر داده‌ها برای استخراج اطلاعات می‌باشد.

۴) یک روش آماری مناسب، دقیق‌تر از داده‌ها و حقایق اصلی می‌باشد.

متغیرها و انواع آن

فرض کنید در یک پارکینگ پر از اتومبیل هستید. شما می‌توانید یک یا چند ویژگی این اتومبیل‌ها را بررسی کنید. (مانند سال تولید، رنگ، حجم موتور و ...) به هر یک از ویژگی‌هایی که مورد بررسی قرار می‌گیرد متغیر می‌گویند. هر یک از متغیرهای مورد بررسی می‌توانند کمی یا کیفی باشند.

متغیر: هر ویژگی از اشخاص یا اشیاء که قرار است بررسی شود.

انواع متغیرها

۱- کمی: متغیرهایی هستند که مقادیر عددی می‌گیرند و برای آنها عملیات ریاضی (جمع، تفریق، معدل‌گیری و...) و اندازه‌گیری قابل انجام است و یا قابل شمردن هستند. مانند: قد، وزن، سن و...

۲- کیفی: متغیرهایی هستند که الزاماً مقدار عددی نمی‌گیرند و صرفاً برای دسته‌بندی افراد یا اشیاء در گروه‌ها به‌کار می‌روند. مانند رنگ مو، گروه خونی، جنسیت افراد و...

دقت کنید مثلاً وقتی می‌خواهیم بدانیم «شماره شناسنامه افراد» چه نوع متغیری است باید بگوییم اگرچه «شماره شناسنامه افراد» یک عدد است امّا چون نمی‌توان آن را شمرد یا اندازه‌گیری کرد. پس متغیر کیفی است.

اما «تعداد طبقات ساختمان‌ها» یک عدد است که می‌توان آن را شمرد و یا «وزن افراد» را می‌توانیم اندازه‌گیری کنیم. بنابراین متغیر کمی هستند.

اندازه‌گیری: در تعریف به معنای ایجاد تفکیک بین افراد یا اشیاء است.

می‌توانیم متغیرها را با توجه به دقت و سطح اندازه‌گیری، به چهار مقیاس اسمی، ترتیبی، فاصله‌ای و نسبتی تقسیم می‌کنیم.

مقیاس‌های اندازه‌گیری

۱ **اسمی:** این مقیاس برای متغیرهایی است که شامل نام‌ها، برچسب‌ها و گروه‌ها می‌باشد و فقط جنبه کیفی یک صفت را در نظر می‌گیرند یعنی کدهایی که به پاسخ اختصاص داده می‌شود اولویتی بر یک‌دیگر ندارند و فقط برای گروه‌بندی به‌کار می‌روند.

۱- متغیر نوع رنگ   سفید (۱)   سیاه (۲)   زرد (۳)

۲- متغیر جنسیت   خانم (۱)   آقا (۲)

رنگ چشم، گروه خونی و... .

۲ **ترتیبی:** این مقیاس، ضمن ایجاد تفکیک بین افراد و اشیاء، ارجحیت نیز قائل است و علاوه بر داشتن خصوصیات اسمی از ویژگی‌های ترتیبی نیز برخوردار است. این مقیاس برای متغیرهای کیفی که قابل مرتب کردن هستند و در عین حال، محاسبه اختلاف بین مقادیر داده‌ها که یا امکان‌پذیر نیست یا بی‌معناست، استفاده می‌شود. مثلاً در یک مسابقهٔ دو، نفرات اول تا سوم را مشخص می‌کنیم. حال ممکن است نفر اول با نفر دوم فاصله زمانی زیادی در رسیدن به خط پایان داشته باشد ولی به این فاصله توجهی نمی‌کنیم و یا مثلاً اگر سه دانش‌آموز اول در درس ریاضی نمرات ۱۹، ۱۴ و ۱۰ گرفته باشند رتبه‌های اول تا سوم را به آنها می‌دهیم و توجه نمی‌کنیم که اختلاف نمرات چقدر است.

مثال‌های دیگر: ۱- میزان تحصیلات (بی‌سواد، ابتدایی، دیپلم، لیسانس و...)

۲- میزان توانایی در مکالمه به زبان انگلیسی (کم، متوسط، زیاد، خیلی زیاد و ...)

۳- میزان درآمد خانوار در ماه (کم، متوسط، زیاد و ...)

۳ **فاصله‌ای:** در این مقیاس ویژگی افراد یا اشیاء به دقت اندازه‌گیری می‌شود و برای داده‌هایی به‌کار می‌رود که قابل مرتب کردن هستند. این مقیاس علاوه بر دارا بودن ویژگی دو مقیاس قبلی یعنی رده‌بندی تفاوت‌ها (مقیاس اسمی) و رتبه‌بندی تفاوت‌ها (مقیاس ترتیبی)، توان آن را دارد که تفاوت‌ها را فاصله‌بندی کند یعنی در تعیین فواصل بین ارزش‌ها و مقادیر یک صفت کمک کند چراکه انتخاب مبدأ یا صفر، اختیاری است. به‌عنوان مثال، متغیر «دمای هوای شهرها» دارای مقیاس فاصله‌ای می‌باشد، زیرا نمی‌توان ادعا نمود که ۵۰ درجه سانتی‌گراد دو برابر ۲۵ درجه سانتی‌گراد است. اما می‌توان به‌طور مقایسه‌ای عنوان نمود که فاصله ۳۸ و ۳۹ درجه برابر ۴۵ تا ۴۶ درجه است. یعنی اختلاف بین مقادیر داده‌ها با معناست اما نسبت مقادیر داده‌ها بی‌معناست. یعنی اعمال ضرب و تقسیم در این‌جا وجود ندارد. مانند درجه حرارت بین دو شهر که اختلاف آن‌ها قابل محاسبه است اما ضرب این دو درجه دما معنی ندارد.

دمای هوای شهرها، سال‌های تحصیل، مقیاس‌های مانند دماسنج و میزان شنوایی مصادیقی از این نوع مقیاس هستند.

۴ **نسبتی:** این مقیاس برای داده‌هایی به‌کار می‌رود که قابل مرتب کردن هستند، اختلاف بین مقادیر داده‌ها و همچنین نسبت مقادیر داده‌ها با معناست. اغلب متغیرهای فیزیکی مانند وزن، قد و یا حتی درآمد افراد در این مقیاس اندازه‌گیری می‌شوند.

۸۲- کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده‌های آماری به‌ترتیب ۱۴ و ۶۹ می‌باشند. اگر به این داده‌ها چهار عدد ۱۷، ۷، ۱۴ و ۷۷ اضافه شود، دامنهٔ تغییرات کدام است؟

۱) ۵۵ ۲) ۶۱ ۳) ۶۳ ۴) ۷۰

۸۳- در یک مجموعهٔ آماری بزرگ‌ترین عدد ۳۰ و کوچک‌ترین عدد ۵ می‌باشد. هرگاه دو عدد ۱۰ و ۳۶ به این مجموعهٔ آماری افزوده شود، دامنهٔ تغییرات کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۵ ۳) ۵۱ ۴) ۳۱

۸۴- اگر در یک سری داده‌های آماری به‌دست آمده ۴ واحد به بیشترین داده اضافه و ۴ واحد از کم‌ترین داده کم کنیم، دامنهٔ تغییرات چه تغییری می‌کند؟

۱) تغییر نمی‌کند. ۲) ۸ واحد کم می‌شود. ۳) ۸ واحد اضافه می‌شود. ۴) ۵ واحد اضافه می‌شود.

واریانس

یکی از معیارهای پراکندگی واریانس می‌باشد که میزان پراکندگی داده‌ها را نسبت به یک مبدأ به‌نام میانگین نشان می‌دهد.

واریانس برابر **میانگین مجذور انحرافات از میانگین** است و آن را با σ^2 (بخوانید سیگما ۲) نشان می‌دهند، به عبارت دیگر:

$$\sigma^2 = \frac{\text{مجموع مربعات انحرافات داده‌ها از میانگین}}{\text{تعداد داده‌ها}} \quad \text{یا} \quad \sigma^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$$

مراحل محاسبهٔ واریانس

۱ ابتدا میانگین داده‌ها را محاسبه می‌کنیم.

۲ تفاضل میانگین از هر داده را به‌دست می‌آوریم. (هر داده را منهای میانگین می‌کنیم) که به آن انحراف از میانگین گفته می‌شود.

۳ مقادیر مرحله ۲ (انحراف از میانگین‌ها) را به توان ۲ می‌رسانیم. *(اسمش می‌شه مربع یا مجذور انحرافات داده‌ها از میانگین)*

۴ مقادیر مرحلهٔ ۳ را با هم جمع می‌کنیم. (مجموع مربعات انحرافات داده‌ها از میانگین)

۵ عدد به‌دست آمده در مرحلهٔ ۴ را بر تعداد داده‌ها تقسیم می‌کنیم تا واریانس داده‌ها به‌دست آید.

اوووووووووووووووو.....ه!!!!!! کی می‌خواد این مراحلو طی کنه؟؟؟!!

نه بابا! خیلی هم زیاد نیست. ببین!

تعداد ساعاتی که ۴ دانش‌آموز در طول هفته به ورزش اختصاص داده‌اند به‌صورت ۱،۴،۷،۸ می‌باشد. واریانس این داده‌ها را حساب کنید.

ابتدا میانگین داده‌ها را حساب می‌کنیم:

$$۱,۴,۷,۸ \Rightarrow \bar{x} = \frac{۱+۴+۷+۸}{۴} = \frac{۲۰}{۴} = ۵$$

سپس واریانس آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\sigma^2 = \frac{(۱-۵)^2+(۴-۵)^2+(۷-۵)^2+(۸-۵)^2}{۴} = \frac{۱۶+۱+۴+۹}{۴} = \frac{۳۰}{۴} = \frac{۱۵}{۲} = ۷/۵$$

تذکر

اگر داده‌ها دارای فراوانی باشند، بعد از به توان ۲ رساندن انحرافات داده‌ها از میانگین، فراوانی هر داده را پشت پرانتز قرار دهید.

واریانس داده‌های ۴ ، ۸ ، ۸ ، ۸ کدام است؟

در این مثال، دادهٔ ۸، ۳ بار تکرار شده است، از طرفی ابتدا میانگین داده‌ها و سپس واریانس آنها را محاسبه می‌کنیم.

$$\bar{x} = \frac{۸+۸+۸+۴}{۴} = \frac{۲۸}{۴} = ۷$$

$$\sigma^2 = \frac{(۴-۷)^2+۳(۸-۷)^2}{۴} = \frac{۹+۳}{۴} = \frac{۱۲}{۴} = ۳$$

واریانس داده‌های آماری در جدول زیر را به‌دست آورید.

x_i	۲	۴	۶
f_i	۲	۴	۲

ابتدا میانگین موزون داده‌های جدول فوق را می‌یابیم:

$$\bar{x} = \frac{(۲\times۲)+(۴\times۴)+(۲\times۶)}{۲+۴+۲} = \frac{۴+۱۶+۱۲}{۸} = \frac{۳۲}{۸} = ۴$$

حال واریانس داده‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{۲(۲-۴)^2+۴(۴-۴)^2+۲(۶-۴)^2}{۸} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{۸+۰+۸}{۸} = \frac{۱۶}{۸} = ۲$$

۳۲ | ۳ | متغیر «نوع آلایندگی هوا»، مقادیر عددی به خود نمی‌گیرد، پس کیفی می‌باشد و چون ترتیب مشخص ندارد، مقیاس اندازه‌گیری آن اسمی می‌باشد. متغیر «میزان آلودگی هوا»، متغیری است که مقادیر عددی می‌گیرد و برای آن عملیات ریاضی از قبیل جمع و تفریق قابل انجام است، پس نوع آن کمّی می‌باشد. از طرفی چون هر چهار شرط مربوط به مقیاس‌های نسبتی را دارا می‌باشد، پس مقیاس آن نسبتی می‌باشد.

۳۳ | ۱ | متغیر صورت سؤال، همان تعداد دانش‌آموزان مدرسه است که متغیری کمّی با مقیاس نسبتی می‌باشد.

۳۴ | ۳ | متغیری طول عمر تلفن همراه مقدار ذرات سرب موجود در هوا و دمای هوای اتاق همگی کمی هستند ولی متغیر رتبهٔ کنکور، کیفی می‌باشد.

۳۵ | ۱ |

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\Rightarrow 7=\frac{(2x-5)+(6-x)+(4+7x)}{3}\Rightarrow 21=2x-5+6-x+4+7x\Rightarrow 21=8x+5\Rightarrow 16=8x\Rightarrow x=2$$

۳۶ | ۳ |

یادآوری: میانگین همیشه بین کم‌ترین داده و بیشترین داده قرار دارد.

بنابراین با توجه به گزینه‌ها، فقط گزینهٔ «۳» یعنی عدد ۱۵ بین دو عدد ۱۰ (کم‌ترین داده) و ۱۸ (بیشترین داده) قرار دارد که جواب می‌باشد.

۳۷ | ۱ |

$$\bar{x}=\frac{a+a+a+a+a+1}{5}=\frac{3a}{2}\Rightarrow\frac{5a+1}{5}=\frac{3a}{2}\Rightarrow 10a+2=15a\Rightarrow a=\frac{2}{5}$$

حال به محاسبهٔ میانگین داده‌های جدید می‌پردازیم:

$$\bar{y}=\frac{a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)}{5}=\frac{5a+10}{5}=a+2\xrightarrow{a=\frac{2}{5}}\bar{y}=\frac{2}{5}+2\Rightarrow\bar{y}=\frac{12}{5}$$

۳۸ | ۲ | ۶۰ درصد جامعه، مردان و ۴۰ درصد زنان می‌باشند، پس:

$$\bar{x}=\frac{40\times120+60\times140}{60+40}=\frac{4800+8400}{100}=\frac{13200}{100}=132$$

۳۹ | ۲ |

$$\bar{x}=\frac{n\bar{x}_1+m\bar{x}_2}{n+m}\Rightarrow 12=\frac{(n\times15)+(15\times10)}{n+15}\Rightarrow 15n+150=12n+180\Rightarrow 3n=30\Rightarrow n=10$$

۴۰ | ۳ |

مجموع داده‌ها = میانگین × تعداد ⇐ مجموع داده‌های x_1 تا x_{20} $=5\times20=100$

$$\text{میانگین داده‌های جدید}=\frac{\overbrace{x_1+x_2+\cdots+x_{20}}^{100}+100}{20+1}=\frac{100+100}{21}=\frac{200}{21}$$

۴۱ | ۳ |

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=10\Rightarrow x_1+x_2+x_3+x_4=4\times10=40$$

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}=12\Rightarrow\frac{40+x_5}{5}=12\Rightarrow x_5=60-40=20$$

۴۲ | ۴ |

مجموع وزن ۱۰ نفر $=10\times65=650$ کیلوگرم

حال دو نفر که مجموع وزن دوتایی آن‌ها ۱۴۲ کیلوگرم است (دقت کنید وزن هر کدام ۱۴۲ کیلوگرم نیست، وزن دو نفر، جمعاً با هم ۱۴۲ کیلوگرم هستند)، به این افراد اضافه می‌شوند، بنابراین میانگین جدید برابر است با:

$$\bar{x}_{\text{جدید}}=\frac{650+142}{12}=\frac{792}{12}=66\ \text{کیلوگرم}\xrightarrow{\times1000}66000\ \text{گرم}$$

۴۳ | ۱ |

مجموع داده‌ها $=10\times32/5=325$

$$\text{میانگین جدید}=\frac{325-(35+40)}{10-2}=\frac{325-75}{8}=\frac{250}{8}=31/25$$

۴۴ | ۲ | **روش اول:**

مجموع داده‌های اشتباهی $=45\times1124=50580$

چون به‌جای عدد ۱۰۲۴ عدد ۱۲۰۴ محاسبه شده است، یعنی مجموع داده‌ها به اندازهٔ ۱۸۰ = ۱۰۲۴ − ۱۲۰۴ واحد بیشتر (اضافه‌تر) محاسبه شده است، که باید آن را کم کنیم:

$$50580-180=50400\Rightarrow\bar{x}=\frac{50400}{45}=1120$$

روش دوم: به مجموع داده‌های اولیه ۱۸۰ = ۱۰۲۴ − ۱۲۰۴ واحد، اضافی، اضافه شده است!!

این ۱۸۰ واحد باعث شده که $4=\frac{180}{45}$ واحد اضافی به میانگین اضافه شده باشد!! در نتیجه ۱۱۲۰ = ۴ − ۱۱۲۴ میانگین واقعی می‌باشد.

۴۵ | ۳ |

$$\bar{x}=\frac{(1\times2)+(1\times3)+(3\times4)+(5\times5)+(4\times6)+(2\times7)}{1+1+3+5+4+2}=\frac{80}{16}=5$$

۴۶ | ۳ |

$$\bar{x}=\frac{(1\times75)+(4\times80)+(2\times85)+(3\times90)}{1+4+2+3}\Rightarrow\bar{x}=\frac{75+320+170+270}{10}=\frac{835}{10}=83/5$$

بنابراین می‌توانیم بیشترین درآمد جامعه و کمترین درآمد جامعه را بیابیم:

$$\text{بیشترین درآمد جامعه} = ۳m + ۲۰۰ = ۳\times ۱۰۰۰ + ۲۰۰ = ۳۲۰۰\ (\text{هزار تومان}) = ۳۲۰۰۰۰۰\ (\text{تومان})$$

$$\text{کمترین درآمد جامعه} = \frac{m - ۱۰۰}{۲} = \frac{۱۰۰۰ - ۱۰۰}{۲} = ۴۵۰\ (\text{هزار تومان})$$

اختلاف بیشترین درآمد جامعه از کمترین درآمد جامعه برابر است با: $۳۲۰۰۰۰۰ - ۴۵۰۰۰۰ = ۲۷۵۰۰۰۰$ (تومان)

۲۲ [۲] **بررسی سایر گزینه‌ها:**

گزینهٔ «۱»: نرخ تورم را می‌توان از تغییر متوسط قیمت کالا در طول هر زمانی محاسبه کرد.

گزینهٔ «۳»: افزایش شاخص بهای کالاها و خدمات، نشان‌دهندهٔ افزایش هزینهٔ کالاها و خدمات است.

گزینهٔ «۴»: شاخص بهای کالاها و خدمات براساس هزینهٔ ۳۰۰ متغیر محاسبه می‌شود.

۲۳ [۱] شاخص بهای کالا و خدمات به واحد اندازه‌گیری بستگی ندارد.

۲۴ [۲]

$$\text{هزینهٔ خوراکی در فروردین ماه سال ۹۶} = \text{هزینهٔ خوراکی در سال پایه} \times \frac{\text{شاخص بهای خوراکی در فروردین ۹۶}}{\text{شاخص سال پایه}} = ۲۵۰۰۰۰۰ \times \frac{۳۱۰}{۱۰۰} = ۷۷۵۰۰۰۰\ (\text{تومان})$$

۲۵ [۳]

$$\text{هزینهٔ پوشاک در تیر ۹۵} = \text{هزینهٔ پوشاک در سال پایه} \times \frac{\text{شاخص پوشاک در تیر ۹۵}}{\text{شاخص سال پایه}} = ۸۰۰۰۰۰ \times \frac{۳۵۰}{۲۵۰} = ۱۱۲۰۰۰۰\ \text{تومان}$$

$$\text{هزینهٔ خوراک در شهریور ۹۶} = \text{هزینهٔ خوراکی در سال پایه} \times \frac{\text{شاخص خوراکی در شهریور ۹۶}}{\text{شاخص سال پایه}} = ۶۰۰۰۰۰ \times \frac{۳۳۰}{۲۵۰} = ۷۹۲۰۰۰\ \text{تومان}$$

حال اختلاف هزینه‌های به دست آمده را می‌یابیم، داریم:

$$\text{هزینهٔ پوشاک در تیر ۹۵} - \text{هزینهٔ خوراک در شهریور ۹۶} = ۱۱۲۰۰۰۰ - ۷۹۲۰۰۰ = ۳۲۸۰۰۰\ (\text{تومان})$$

۲۶ [۳] ابتدا با استفاده از رابطهٔ نرخ تورم، شاخص بهای کالا را در سال ۹۵ می‌یابیم:

$$\text{نرخ تورم} = \frac{\text{شاخص بهای کالا در سال ۹۵} - \text{شاخص بهای کالا در سال ۹۲}}{\text{شاخص بهای کالا در سال ۹۲}} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۷۵ = \frac{x - ۱۸۰}{۱۸۰} \times ۱۰۰$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{۷۵}^{\,۳}}{\cancel{۱۰۰}_{\,۴}} = \frac{x - ۱۸۰}{۱۸۰} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۳\times ۱۸۰ = ۴x - ۴\times ۱۸۰ \Rightarrow \underbrace{۳\times ۱۸۰ + ۴\times ۱۸۰}_{۷\times ۱۸۰} = ۴x$$

$$\Rightarrow ۷\times ۱۸۰ = ۴x \Rightarrow x = \frac{۷\times ۱۸۰}{۴} = ۳۱۵\ (\text{شاخص بهای کالا در سال ۹۵})$$

حال با داشتن شاخص بهای کالا در سال ۹۵، قیمت کالا را در سال ۹۵ می‌یابیم:

$$\text{قیمت کالا در سال ۹۵} = \text{قیمت کالا در سال ۹۲} \times \frac{\text{شاخص بهای کالا در سال ۹۵}}{\text{شاخص بهای کالا در سال ۹۲}} = \cancel{۲۰}^{\,۱} \times \frac{\cancel{۳۱۵}^{\,۳۵}}{\cancel{۱۸۰}_{\,\cancel{۹}_{\,۱}}} = ۳۵\ (\text{میلیون تومان})$$

۲۷ [۳] شاخص بهای کالا در سال پایه (سال ۹۲) را x می‌گیریم. بنابراین با استفاده از رابطهٔ تورم داریم:

$$\text{تورم} = \frac{\text{شاخص بهای کالا در سال ۹۶} - \text{شاخص بهای کالا در سال ۹۲}}{\text{شاخص بهای کالا در سال ۹۲}} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۳۲ = \frac{۳۷۰ - x}{x} \times ۱۰۰$$

$$\Rightarrow \frac{۳۲}{۱۰۰} = \frac{۳۷۰ - x}{x} \Rightarrow ۰/۳۲x = ۳۷۰ - x \Rightarrow ۰/۳۲x + x = ۳۷۰ \Rightarrow ۱/۳۲x = ۳۷۰ \Rightarrow x = \frac{۳۷۰}{۱/۳۲} = \frac{۳۷۰۰۰}{۱۳۲} \simeq ۲۸۰$$

۲۸ [۲] توجه شود که در این سؤال، سال پایه سال ۹۳ می‌باشد و شاخص بهای برنج و نان در سال پایه برابر ۲۰۰ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\text{شاخص بهای برنج و نان در سال ۹۵} = \frac{(\text{مقدار مصرفی برنج در سال پایه} \times \text{قیمت برنج در سال ۹۵}) + (\text{مقدار مصرفی نان در سال پایه} \times \text{قیمت نان در سال ۹۵})}{(\text{مقدار مصرفی برنج در سال پایه} \times \text{قیمت برنج در سال پایه}) + (\text{مقدار مصرفی نان در سال پایه} \times \text{قیمت نان در سال پایه})} \times ۲۰۰$$

$$= \frac{(۴۰۰۰۰\times ۱۱۰) + (۱۰۰۰۰\times ۳۰۰)}{(۲۵۰۰۰\times ۱۱۰) + (۸۰۰۰\times ۳۰۰)} \times ۲۰۰ = \frac{۴۴۰۰۰۰۰ + ۳۰۰۰۰۰۰}{۲۷۵۰۰۰۰ + ۲۴۰۰۰۰۰} \times ۲۰۰ = \frac{۷۴۰۰۰۰۰}{۵۱۵۰۰۰۰} \times ۲۰۰ \simeq ۲۸۷$$

توجه شود که چون سال پایه، سال ۹۳ می‌باشد و شاخص بهای سال پایه ۲۰۰ می‌باشد، کسر فوق در ۲۰۰ (شاخص بهای سال پایه) ضرب می‌شود.

۹- به‌منظور بررسی رابطهٔ بین سرعت خودروها و تعداد تصادف‌ها در جاده‌های برون‌شهری، داده‌های جدول زیر، مربوط به خودروهای موجود در جاده‌های درون شهری استخراج شده است. کدام گزینه نادرست است؟

محدودهٔ سرعت (کیلومتر بر ساعت)	۰ – ۱۰	۱۰ – ۲۰	۲۰ – ۳۰	۳۰ – ۴۰	۴۰ – ۵۰	۵۰ – ۶۰	۶۰ – ۷۰	۷۰ – ۸۰	۸۰ – ۹۰	۹۰ – ۱۰۰	۱۰۰ – ۱۱۰	۱۱۰ – ۱۲۰
تعداد خودروهای تصادف کرده	۳۰	۱۱۰	۲۷۰	۲۹۰	۳۰۰	۳۶۰	۱۱۰	۲۹	۱۹	۱۷	۱۳	۲

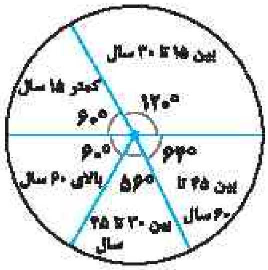
۱) هر چه سرعت خودرو بیشتر شود، احتمال وقوع تصادف کمتر می‌باشد.

۲) جدول فوق مربوط به گام چهارم چرخهٔ آمار در حل مسائل می‌باشد.

۳) در داده‌های جدول فوق، گام دوم چرخهٔ آمار در حل مسائل رعایت شده است.

۴) در سرعت‌های پایین، احتمال وقوع تصادف بیشتر است.

۱۰- نمودار دایره‌ای مقابل، فراوانی بینندگان یک فیلم سینمایی را نشان می‌دهد. اگر تعداد کل تماشاگران ۳۶۰۰۰ نفر باشد، کدام گزینه نادرست است؟



۱) حدود ۳۳ درصد از تماشاگران بین ۳۰ تا ۶۰ سال سن دارند.

۲) تعداد افراد کمتر از ۱۵ سال، ۶۰۰۰ نفر می‌باشد.

۳) این نمودار مربوط به گام چهارم چرخهٔ آمار در حل مسائل است.

۴) اگر پارامتر جامعه مربوط به بینندگان مرد، ۰/۳ باشد، تعداد بینندگان زن، ۱۰۸۰۰ نفر می‌باشد.

۱۱- کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح می‌باشد؟

۱) اگر از وجود داده‌های دورافتاده اطلاعی نداشته باشیم، برای نمایش اطلاعات متغیرهای کمّی، نمودار نمایش‌دهندهٔ میانگین و انحراف معیار مطمئن‌تر می‌باشد.

۲) با استفاده از نمودار جعبه‌ای، می‌توان میانگین داده‌ها را تشخیص داد.

۳) اگر دادهٔ دورافتاده داشته باشیم، مناسب‌ترین معیار برای توصیف داده‌ها، میانه و دامنهٔ میان‌چارکی می‌باشند.

۴) در نمودار نمایش‌دهندهٔ میانگین و انحراف معیار، بلندی مستطیل نشان‌دهندهٔ انحراف معیار و میلهٔ خطای آن، به اندازهٔ میانگین روی مستطیل بالا می‌آید.

۱۲- در داده‌های آماری ۱۵، ۱۷، ۱۰، ۱۲/۵، ۱۳، ۹، ۱۶، ۱۷/۵، ۱۳، ۱۴، تفاضل میانه از میانگین، کدام است؟ *(امتحانی خرج ۹۹)*

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

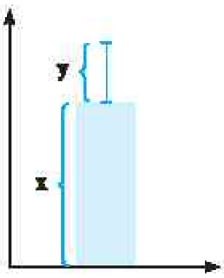
۱۳- تعدادی دادهٔ آماری به‌صورت ۳۱,۴۱,۱۶,۹,۲۱,۱۱,۴۳,۳۹,۲۶,۱۸,۱۱,۳۴ مفروض‌اند. کدام‌یک از چهار دادهٔ زیر را به داده‌های موجود اضافه کنیم تا میانگین، بیشترین افزایش ممکن را داشته باشد و میانه، چارک اول و چارک سوم تغییری نکنند؟

۱) ۱۲,۱۳,۲۲,۴۹ ۲) ۹,۱۹,۳۰,۴۶ ۳) ۸,۲۰,۳۴,۳۹ ۴) ۱۲,۱۴,۳۰,۳۵

۱۴- کدام‌یک از داده‌های زیر را به داده‌های ۳,۷,۱,۲,۷ اضافه کنیم تا میانگین و انحراف معیار داده‌های جدید، بیشترین مقدار را داشته باشند امّا میانه تغییری نکند؟

۱) ۲,۱۳ ۲) ۱,۲ ۳) ۱,۷ ۴) ۵,۶

۱۵- اگر نمودار مقابل مربوط به داده‌های ۶,x,۸,۷,۱۲,۱۴,۱۱,۷,۷ باشد، حاصل $8x+9y^2$ کدام است؟



۱) ۷۲

۲) ۶۰

۳) ۱۳۲

۴) ۱۴۲

۱۸ **۳** ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم. ده داده داریم که میانگین دو دادهٔ وسط، میانه است.

$$\overbrace{9\,,\,10\,,\,12/5\,,\,13\,,\,13}^{\text{نیمهٔ اول داده‌ها}}\,,\,\overbrace{14\,,\,15\,,\,16\,,\,17\,,\,17/5}^{\text{نیمهٔ دوم داده‌ها}}$$

$$Q_1=12/5 \qquad Q_2=\frac{13+14}{2}=13/5 \qquad Q_3=16$$

دامنهٔ تغییرات داده‌های جعبه = دامنهٔ میان چارکی = $Q_3-Q_1=16-12/5=3/5$

۱۹ **۱**

> **تذکر:** اگر در نمودار نمایش‌دهندهٔ میانگین و انحراف معیار، نسبت طول میلهٔ خطا به بلندی مستطیل خیلی ناچیز باشد، پراکندگی داده‌ها ناچیز می‌باشد و اگر نسبت طول میلهٔ خطا به بلندی مستطیل، ناچیز نباشد، پراکندگی داده‌ها زیاد می‌باشد.

طبق تذکر، چون نسبت طول میلهٔ خطا به بلندی مستطیل ناچیز نمی‌باشد، بنابراین پراکندگی داده‌ها حول میانگین زیاد می‌باشد و دادهٔ دورافتاده داریم. بنابراین گزینه‌های «۲» و «۳» حذف می‌شوند. حال به بررسی گزینه‌های «۱» و «۴» می‌پردازیم. با توجه به نمودار، میانگین داده‌ها باید برابر ۷ باشد، داریم:

گزینهٔ «۱»: $1,2,8,7,10,2,19 \Rightarrow \bar{x}=\dfrac{1+2+8+7+10+2+19}{7}=\dfrac{49}{7}=7$ ✓

گزینهٔ «۴»: $1,3,3,9,1,20,19 \Rightarrow \bar{x}=\dfrac{1+3+3+9+1+20+19}{7}=\dfrac{56}{7}=8$ ✗

۲۰ **۲** چون در بین داده‌های موجود دادهٔ دورافتاده نداریم، معیار مناسب گرایش به مرکز، میانگین و معیار مناسب پراکندگی، انحراف معیار می‌باشد، بنابراین هردو را برای داده‌های مسئله محاسبه می‌کنیم. جهت محاسبهٔ سریع‌تر میانگین، از تمامی داده‌ها ۲۰ واحد کم می‌کنیم، داریم:

$$20,20,21,21,21,22,24,27 \xrightarrow[\text{از تمامی داده‌ها}]{\text{کم کردن ۲۰ واحد}} 0,0,1,1,1,2,4,7 \Rightarrow \bar{x}_{\text{جدید}}=\frac{2\times0+3\times1+2+4+7}{8}=\frac{16}{8}=2$$

بنابراین میانگین داده‌های اولیه برابر $\bar{x}_{\text{اولیه}}=2+20=22$ می‌باشد. چون اضافه یا کم کردن مقداری ثابت از داده‌ها، تأثیری بر انحراف معیار داده‌ها ندارد، بنابراین انحراف معیار داده‌های جدید با داده‌های اولیه برابر است. داریم:

$$\sigma^2=\frac{2\times(0-2)^2+3\times(1-2)^2+(2-2)^2+(4-2)^2+(7-2)^2}{8}=\frac{8+3+0+4+25}{8}=\frac{40}{8}=5\Rightarrow\sigma=SD=\sqrt{5}$$

> **تذکر:** چنانچه در بین داده‌های موجود، دادهٔ دورافتاده داشته باشیم، معیار مناسب گرایش به مرکز، میانه و معیار مناسب پراکندگی، IQR و دامنهٔ تغییرات می‌باشد.

۲۱ **۳** بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$0,2,3,4,6,8,8,9,9,11$$

$$Q_1=3 \qquad Q_2=\frac{6+8}{2}=7 \qquad Q_3=9$$

بنابراین ۵ نفر از دانش‌آموزان خواسته‌اند که حداقل ۷ ساعت در ماه کلاس‌های فوق‌برنامه برگزار شود.

گزینهٔ «۲»: ابتدا میانگین داده‌های اولیه را می‌یابیم:

$$\bar{x}_{\text{اولیه}}=\frac{0+2+3+4+6+8+8+9+9+11}{10}=\frac{60}{10}=6$$

چون میانگین داده‌های اضافه‌شده $\left(\dfrac{8+4}{2}=\dfrac{12}{2}=6\right)$ برابر میانگین داده‌های اولیه است، بنابراین میانگین داده‌ها تغییری نمی‌کند. حال میانهٔ داده‌های جدید را می‌یابیم:

$$0,2,3,4,4,6,8,8,8,9,9,11$$

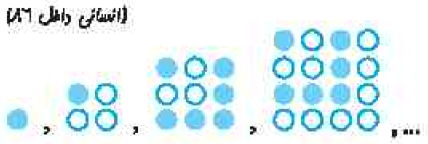
$$Q_2=\frac{6+8}{2}=7$$

بنابراین میانه و میانگین تغییری نمی‌کنند.

گزینهٔ «۳»: دادهٔ ۱۱ بزرگ‌ترین داده است و طبیعتاً از میانگین نیز بزرگ‌تر است. وقتی دادهٔ ۱۱ به ۱۶ تبدیل شود، میانگین داده‌ها افزایش یافته و هم‌چنین پراکندگی آن‌ها نیز بیشتر می‌شود (زیرا دامنهٔ تغییرات بیشتر می‌شود). پس انحراف معیار داده‌ها افزایش می‌یابد و میانه، چارک اول و چارک سوم تغییری نمی‌کنند. بنابراین پاسخ، گزینهٔ «۳» می‌باشد.

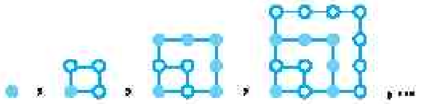
گزینهٔ «۴»: چون اختلاف بین بزرگ‌ترین داده و کوچک‌ترین داده زیاد می‌باشد، پس داده‌ها متمرکز نبوده و پراکنده می‌باشند. بنابراین برای بررسی تمرکز و پراکندگی داده‌ها می‌توان به ترتیب از میانه و دامنهٔ میان چارکی استفاده کرد.

۲۵- درآرایه‌های مربعی زیر، تفاضل دایره‌های توپر در دو جملهٔ دهم و یازدهم کدام است؟ (انسانی داخل ۸۶)



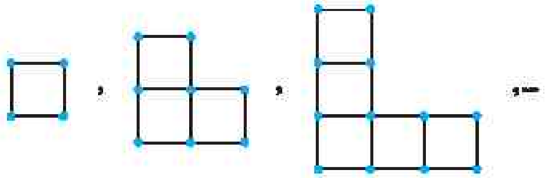
۱) صفر ۲) ۱۷
۳) ۱۹ ۴) ۲۱

۲۶- درآرایه‌های مربعی شکل زیر، جملهٔ دهم چند عضو سفید دارد؟ (انسانی داخل ۸۳ - با تغییر)



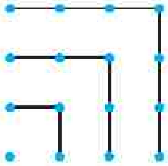
۱) ۵۵ ۲) ۷۲
۳) ۶۵ ۴) ۵۶

۲۷- رابطهٔ بازگشتی الگوی مقابل کدام است؟



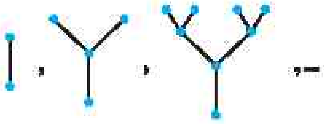
۱) $a_{n+1} = a_n + ۴ , a_1 = ۴$
۲) $a_{n+1} = ۲a_n , a_1 = ۴$
۳) $a_{n+1} = a_n + ۸ , a_1 = ۴$
۴) $a_{n+1} = a_n + ۲ , a_1 = ۴$

۲۸- با استفاده از الگوی مقابل، حاصل ۹۹+...+۷+۵+۳+۱ کدام است؟



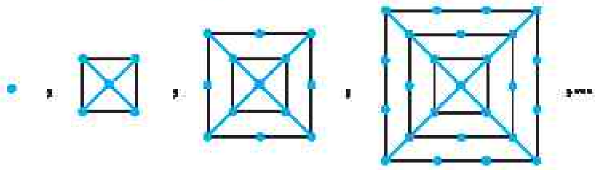
۱) ۱۰۰۰۰ ۲) ۱۰۰۰
۳) ۲۵۰۰ ۴) ۲۵۰

۲۹- با توجه به الگوی مقابل، تعداد نقطه‌های شکل دهم چند تا است؟



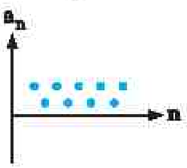
۱) ۲×۹ ۲) ۲×۱۰
۳) $۲^{۹}$ ۴) $۲^{۱۰}$

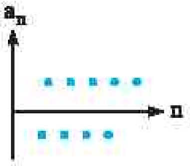
۳۰- شکل دهم از الگوی مقابل، چند نقطه دارد؟

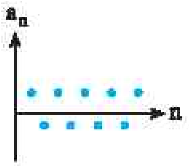


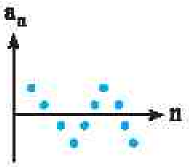
۱) ۱۶۱
۲) ۲۲۱
۳) ۱۸۱
۴) ۲۰۱

۳۱- نمودار دنبالهٔ $a_{n+1} = -\frac{1}{a_n}$ به‌ازای $a_1 = ۲$، شبیه نمودار کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

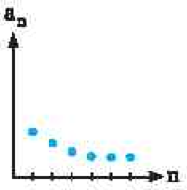
۱) 

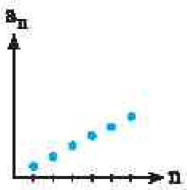
۲) 

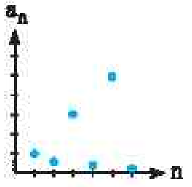
۳) 

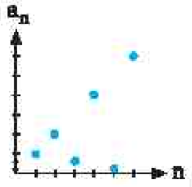
۴) 

۳۲- نمودار دنبالهٔ $a_n = \begin{cases} n \ ; & \text{زوج } n \\ \frac{1}{n} \ ; & \text{فرد } n \end{cases}$ به ازای $n \leq ۶$ کدام است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۳۳- به‌کمک رابطهٔ بازگشتی $a_{n+1} = \frac{1}{۲}\left(a_n + \frac{k}{a_n}\right)$ و با فرض $a_1 = k$، اگر $a_۳$ را تقریبی برای $\sqrt{k}$ در نظر بگیریم، جذر تقریبی $\sqrt{۶}$ کدام است؟

۱) ۲/۱ ۲) ۲/۶ ۳) ۳/۱ ۴) ۲/۸ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۳۴- جملهٔ چندم از دنبالهٔ مربعی (...,۱,۴,۹) برابر با ۲۸۹ است؟

۱) سیزدهم ۲) شانزدهم ۳) هفدهم ۴) نوزدهم

۱۸ ۱

$$a_{n+۱}=\frac{۲}{۱+a_n}\ ,\ a_۱=۲$$

$$\xRightarrow{n=۱} a_۲=\frac{۲}{۱+a_۱}=\frac{۲}{۱+۲}=\frac{۲}{۳} \qquad \xRightarrow{n=۲} a_۳=\frac{۲}{۱+a_۲}=\frac{۲}{۱+\frac{۲}{۳}}=\frac{۲}{\frac{۵}{۳}}=\frac{۶}{۵}$$

$$\xRightarrow{n=۳} a_۴=\frac{۲}{۱+a_۳}=\frac{۲}{۱+\frac{۶}{۵}}=\frac{۲}{\frac{۱۱}{۵}}=\frac{۱۰}{۱۱} \qquad \xRightarrow{n=۴} a_۵=\frac{۲}{۱+a_۴}=\frac{۲}{۱+\frac{۱۰}{۱۱}}=\frac{۲}{\frac{۲۱}{۱۱}}=\frac{۲۲}{۲۱}$$

۱۹ ۳

$$a_{n+۲}=a_{n+۱}+a_n-n\ ,\ a_۱=a_۲=۳$$

$$\xRightarrow{n=۱} a_۳=a_۲+a_۱-۱=۳+۳-۱=۵ \qquad \xRightarrow{n=۲} a_۴=a_۳+a_۲-۲=۵+۳-۲=۶$$

$$\xRightarrow{n=۳} a_۵=a_۴+a_۳-۳=۶+۵-۳=۸ \qquad \xRightarrow{n=۴} a_۶=a_۵+a_۴-۴=۸+۶-۴=۱۰$$

$$\xRightarrow{n=۵} a_۷=a_۶+a_۵-۵=۱۰+۸-۵=۱۳ \qquad \xRightarrow{n=۶} a_۸=a_۷+a_۶-۶=۱۳+۱۰-۶=۱۷$$

۲۰ ۴ **روش اول:** ابتدا جملات دنباله را نوشته و رابطه‌ای بین آن‌ها تعیین می‌کنیم:

$$۱\underbrace{,}_{+۱}۲\underbrace{,}_{+۲}۴\underbrace{,}_{+۳}۷\underbrace{,}_{+۴}۱۱\underbrace{,}_{+۵}۱۶,\dots$$

بنابراین با توجه به رابطهٔ به‌دست آمده در دنبالهٔ اعداد، جملهٔ دهم دنبالهٔ داده شده برابر است با:

جمله دهم

$$۱,۲,۴,۷,۱۱,۱۶\underbrace{,}_{+۶}۲۲\underbrace{,}_{+۷}۲۹\underbrace{,}_{+۸}۳۷\underbrace{,}_{+۹}۴۶$$

روش دوم:

$$۱,\ ۲,\ ۴,\ ۷,\ ۱۱,\ ۱۶,\dots$$
$$۱\ \ ۱+۱\ \ ۱+۳\ \ ۱+۶\ \ ۱+۱۰\ \ ۱+۱۵$$

اعداد داخل دایره، همان اعداد دنبالهٔ مثلثی هستند. بنابراین برای پیدا کردن جمله دهم، کافیست مقدار جملهٔ نهم دنبالهٔ مثلثی را پیدا کرده و با عدد یک جمع کنیم:

$$a_n=\frac{n(n+۱)}{۲}=\frac{۹(۹+۱)}{۲}=\frac{۹\times۱۰}{۲}=۴۵ \Rightarrow \text{جملهٔ دهم دنبالهٔ فوق}=۱+۴۵=۴۶$$

البته روش‌های حل دیگری نیز وجود دارند!!

۲۱ ۱ با توجه به الگوی داده شده، داریم:

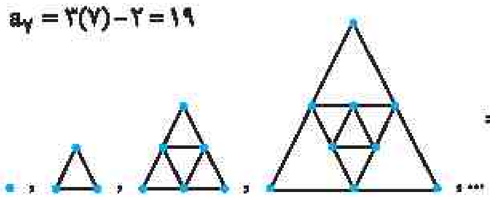
شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد رئوس	۱	۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶	۱۹

+۳ +۳ +۳ +۳ +۳ +۳

در واقع ضابطهٔ تابعی این الگو به‌صورت $a_n=۳n-۲$ است، درنتیجه داریم:

$$a_۷=۳(۷)-۲=۱۹$$

۲۲ ۴ طبق روند الگوی داده‌شده، داریم:



شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	$\cdots$	n
تعداد رأس	۱	۳	۶	۹	$\cdots$	$۳(n-۱)$

۳×۱ ۳×۲ ۳×۳

$\Rightarrow$ تعداد رأس‌های شکل nاُم $=۳(n-۱)=۳n-۳\ (n\geq۲)$

۲۳ ۱

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	۵
تعدادکل دایره‌ها	۱	۴	۹	۱۶	۲۵
تعداد دایره‌های توپر	۱	۲	۵	۸	۱۳
تعداد دایره‌های توخالی	۰	۲	۴	۸	۱۲

اگر a_n تعداد دایره‌های توپر در شکل n اُم باشد، آن‌گاه داریم:

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{n^۲}{۲} & ;\ \text{زوج } n\\[2mm] \dfrac{n^۲+۱}{۲} & ;\ \text{فرد } n\end{cases}$$

در واقع اگر n زوج باشد، تعداد دایره‌های توپر با تعداد دایره‌های توخالی برابر است و برابر نصف تعداد کل دایره‌ها $(\frac{n^۲}{۲})$ می‌باشد. همچنین اگر n فرد باشد، تعداد دایره‌های توپر از تعداد دایره‌های توخالی یک واحد بیشتر است.

$$a_{۱۱}=\frac{۱۱^۲+۱}{۲}=\frac{۱۲۱+۱}{۲}=\frac{۱۲۲}{۲}=۶۱$$

۲۴ ۳

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	۵
تعدادکل دایره‌ها	۱	۱+۳=۴	۱+۳+۵=۹	۱+۳+۵+۷=۱۶	۱+۳+۵+۷+۹=۲۵
تعداد دایره‌های توخالی	۰	۳	۳	۳+۷	۳+۷
تعداد دایره‌های توپر	۱	۱	۱+۵	۱+۵	۱+۵+۹

براساس روند موجود در جدول، در شکل nاُم داریم:

$$\text{تعداد کل دایره‌ها}=۱+۳+۵+۷+۹+۱۱+\cdots+(۲n-۱)$$

میکرو • ریاضیات جامع انسانی

پاسخنامه تشریحی

۱ **۴** **روش اول:** باید نسبت هر دو جملهٔ متوالی برابر باشد:

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: $\frac{۱}{\frac{۲}{۳}} \neq \frac{۳}{۱}$ ✗

گزینهٔ «۲»: $\frac{۶}{۴} = \frac{۹}{۶} \neq \frac{۱۲}{۹}$ ✗

گزینهٔ «۳»: $\frac{۶}{۴} = \frac{۹}{۶} \neq \frac{۱۳}{۹}$ ✗

گزینهٔ «۴»: $\frac{۱۲}{۸} = \frac{۱۸}{۱۲} = \frac{۲۷}{۱۸} = \frac{۳}{۲}$ ✓

روش دوم: طبق ویژگی دنباله‌های هندسی، اعداد a ، b و c سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای هندسی‌اند اگر b (جمله وسط) واسطه هندسی بین دو جملهٔ دیگر باشد، یعنی $b^۲ = ac$.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: $۱^۲ = \frac{۲}{۳} \times ۳ \Rightarrow ۱ = ۲$ (غ‌ق‌ق)

گزینهٔ «۲»: $\begin{cases} ۶^۲ = ۴\times ۹ \Rightarrow ۳۶ = ۳۶ \checkmark \\ ۹^۲ = ۶\times ۱۲ \Rightarrow ۸۱ = ۷۲ \text{ (غ‌ق‌ق)} \end{cases}$

گزینهٔ «۳»: $\begin{cases} ۶^۲ = ۴\times ۹ \Rightarrow ۳۶ = ۳۶ \checkmark \\ ۹^۲ = ۶\times ۱۳ \Rightarrow ۸۱ = ۷۸ \text{ (غ‌ق‌ق)} \end{cases}$

گزینهٔ «۴»: $\begin{cases} ۱۲^۲ = ۸\times ۱۸ \Rightarrow ۱۴۴ = ۱۴۴ \checkmark \\ ۱۸^۲ = ۱۲\times ۲۷ \Rightarrow ۳۲۴ = ۳۲۴ \checkmark \end{cases}$

بنابراین فقط اعداد موجود در گزینهٔ «۴» می‌توانند چهار جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند.

۲ **۳** **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ «۱»: $a_{n+1} = (a_n)^۲ \xRightarrow{a_۱=۲} ۲ \overset{\times ۲}{,} ۴ \overset{\times ۴}{,} ۱۶ ,\ldots \Rightarrow$ دنباله‌ای هندسی نیست.

گزینهٔ «۲»: $a_{n+1} = ۲a_n + ۳ \xRightarrow{a_۱=۲} ۲ \overset{\times\frac{۷}{۲}}{,} ۷ \overset{\times\frac{۱۷}{۷}}{,} ۱۷ ,\ldots \Rightarrow$ دنباله‌ای هندسی نیست.

گزینهٔ «۳»: $a_{n+1} - a_n = ۲^n \Rightarrow a_{n+1} = a_n + ۲^n \xRightarrow{a_۱=۲} ۲ \overset{\times ۲}{,} ۴ \overset{\times ۲}{,} ۸ \overset{\times ۲}{,} ۱۶ \overset{\times ۲}{,} ۳۲ ,\ldots \Rightarrow$ دنباله‌ای هندسی است.

گزینهٔ «۴»: $a_{n+1} = -a_n + ۲^n \xRightarrow{a_۱=۲} ۲,۰,۴,\ldots \Rightarrow ۰^۲ \neq ۲\times ۴ \Rightarrow$ دنباله‌ای هندسی نیست.

۳ **۱**

$$a_n = a_۱ r^{n-۱} \xRightarrow[a_n=۸۱,\, r=\frac{۱}{۲}]{a_۱=۱۲۹۶} ۸۱ = ۱۲۹۶(\frac{۱}{۲})^{n-۱} \Rightarrow (\frac{۱}{۲})^{n-۱} = \frac{۸۱}{۱۲۹۶} = \frac{\overset{۹}{\cancel{۸۱}}}{\underset{۱}{\cancel{۹}}\times ۱۴۴} = \frac{\overset{۱}{\cancel{۹}}}{\underset{۱}{\cancel{۹}}\times ۱۶} = \frac{۱}{۱۶}$$

$$\Rightarrow (\frac{۱}{۲})^{n-۱} = (\frac{۱}{۲})^۴ \Rightarrow n-۱ = ۴ \Rightarrow n = ۵$$

۴ **۲**

$$a_n = a_۱ r^{n-۱} \xRightarrow[r=-\frac{۱}{۲}]{a_۶=\frac{۱}{۸}} \frac{۱}{۸} = a_۱(-\frac{۱}{۲})^{۶-۱} \Rightarrow \frac{۱}{۸} = a_۱(-\frac{۱}{۲})^۵ \Rightarrow \frac{۱}{۸} = a_۱(-\frac{۱}{۳۲}) \Rightarrow a_۱ = \frac{\frac{۱}{۸}}{-\frac{۱}{۳۲}} = -\frac{۳۲}{۸} = -۴$$

۵ **۳**

$$a_n = a_۱ r^{n-۱} \xRightarrow[a_n=۶۴]{a_۱=\frac{۱}{۱۶},\, r=-۲} ۶۴ = \frac{۱}{۱۶}(-۲)^{n-۱} \Rightarrow (-۲)^{n-۱} = ۶۴\times ۱۶ \Rightarrow (-۲)^{n-۱} = ۲^۶ \times ۲^۴ \Rightarrow (-۲)^{n-۱} = ۲^{۱۰} \Rightarrow n-۱ = ۱۰ \Rightarrow n = ۱۱$$

۶ **۴** اگر a_n و a_m دو جملهٔ دلخواه از دنباله‌ای هندسی با نسبت مشترک r باشند، آنگاه:

$$r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n} \Rightarrow r^{۷-۴} = \frac{a_۷}{a_۴} = \frac{۸}{۱۶} \Rightarrow r^۳ = \frac{۱}{۲}$$

$$a_۴ = a_۱ r^۳ \xRightarrow[r^۳=\frac{۱}{۲}]{a_۴=۱۶} ۱۶ = a_۱ \times \frac{۱}{۲} \Rightarrow a_۱ = ۲\times ۱۶ = ۳۲$$

معادله یک تساوی شامل یک یا چند متغیر است که به‌ازای برخی از مقادیر متغیرهایش، تساوی برقرار است. حل یک معادله یعنی یافتن مقادیری برای متغیرهای معادله که به ازای آن‌ها تساوی برقرار است.

معادلهٔ درجه اول: هر معادله درجه اول به شکل $ax+b=0$ می‌باشد که در آن $a\neq 0$ و $b\in\mathbb{R}$ است. هر معادله درجه اول یک جواب دارد که با طی مراحل زیر به دست می‌آید:

۱ اگر معادله شامل عملیات‌های ضرب، تقسیم یا توان باشد، ابتدا آن‌ها را انجام می‌دهیم.

۲ اگر معادله شامل کسر باشد، طرفین معادله را در مخرج مشترک کسرها ضرب می‌کنیم تا مخرج‌ها حذف شوند.

۳ جملات معلوم را به یک طرف و جملات دارای مجهول را به طرف دیگر تساوی منتقل می‌کنیم، فقط دقت شود که هر جمله‌ای که به طرف دیگر تساوی منتقل می‌کنیم، باید علامتش را قرینه کنیم.

۴ در دو طرف تساوی جملات را جمع جبری می‌کنیم.

۵ طرفین معادله را بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم.

جواب معادلهٔ $\frac{۲(x-۳)}{۳}-\frac{x+۱}{۲}=\frac{x-۱}{۴}$ کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) $\frac{۲۷}{۵}$ ۳) $\frac{-۲۷}{۵}$ ۴) ۲۷-

گزینهٔ «۴»

$$\frac{۲(x-۳)}{۳}-\frac{x+۱}{۲}=\frac{x-۱}{۴}\Rightarrow\frac{۲x-۶}{۳}-\frac{x+۱}{۲}=\frac{x-۱}{۴}$$

طرفین معادله را در مخرج مشترک کسرها یعنی ۱۲ ضرب می‌کنیم:

$$۱۲\left(\frac{۲x-۶}{۳}-\frac{x+۱}{۲}\right)=۱۲\left(\frac{x-۱}{۴}\right)\Rightarrow ۴(۲x-۶)-۶(x+۱)=۳(x-۱)\Rightarrow ۸x-۲۴-۶x-۶=۳x-۳\Rightarrow ۸x-۶x-۳x=-۳+۲۴+۶$$

$$\Rightarrow -x=۲۷\xrightarrow{\div(-۱)}x=\frac{۲۷}{-۱}=-۲۷$$

اگر $x=۲$ جواب معادلهٔ درجه اول $mx+m=\frac{x}{۲}+۲$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) صفر

گزینهٔ «۱»: جواب هر معادله در آن معادله صدق می‌کند، یعنی تساوی به ازای $x=۲$ همواره برقرار است:

$$mx+m=\frac{x}{۲}+۲\xrightarrow{x=۲}۲m+m=\frac{۲}{۲}+۲\Rightarrow ۳m=۱+۲\Rightarrow ۳m=۳\xrightarrow{\div ۳}m=\frac{۳}{۳}=۱$$

کاربرد معادلهٔ درجه اول در حل مسائل

برخی از مسائل را می‌توان به کمک معادلهٔ درجه اول مدل‌سازی کرد و سپس با حل معادلهٔ درجه اول مربوط به آن، مسئله را حل کرد. در این‌گونه مسائل، مجهول مسئله را x فرض کرده و با توجه به صورت مسئله، یک معادلهٔ درجه اول برحسب x می‌سازیم و آن را حل می‌کنیم.

کدام عدد است که دو برابر آن، ۳ واحد بزرگ‌تر از ۱۵ است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۹- ۴) ۶-

گزینهٔ «۲»: آن عدد را x فرض می‌کنیم، پس بنابه صورت مسئله داریم:

$$۲x-۳=۱۵\Rightarrow ۲x=۱۵+۳\Rightarrow ۲x=۱۸\xrightarrow{\div ۲}x=\frac{۱۸}{۲}=۹$$

۱- اگر $x=-۳$ جواب معادلهٔ $ax+\frac{x}{۳}=a$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۲- جواب معادلهٔ $۶x-۵=\frac{۱}{۳}(۱۰x-۶)$، کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۷}$ ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) $-\frac{۱۳}{۷}$

۳- مقدار x از تساوی $\frac{۴x+۱}{۳}=\frac{۱}{۲}+\frac{۳-۲x}{۴}$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳۵}{۳۸}$ ۳) $\frac{۱۹}{۲۶}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

نکته

اگر یکی از دو تابع f یا g توسط زوج مرتب‌ها نمایش داده شده باشد، برای تعیین هر کدام از توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ ابتدا دامنهٔ تابع خواسته شده را می‌یابیم، سپس مقادیر f و g را روی تک‌تک اعضای دامنهٔ به‌دست آمده، یافته و پس از آن، تابع خواسته شده را می‌یابیم.

۹ اگر $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$ و $g=\{(1,2),(0,-1),(-1,1),(2,0)\}$ باشد، تعداد اعضای برد تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینهٔ «۲» ابتدا دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ را می‌یابیم:

$$\text{دامنهٔ تابع } \frac{f}{g} = D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=0\}=[(\mathbb{R}-\{-1\})\cap\{1,0,-1,2\}]-\{2\}=\{1,0\}$$

$$\begin{cases}\frac{f}{g}(1)=\frac{f(1)}{g(1)}=\frac{0}{2}=0\\ \frac{f}{g}(0)=\frac{f(0)}{g(0)}=\frac{-1}{-1}=1\end{cases}\Rightarrow \frac{f}{g}=\{(1,0),(0,1)\}\Rightarrow \text{برد } \frac{f}{g}=\{0,1\}$$

ضرب عدد ثابت در تابع

برای محاسبه توابعی مانند $2f$ و $-3f$ و ... باید عدد ثابت (ضریب) را در مؤلفه‌های دوم ضرب کنیم (و به مؤلفه اول کاری نداشته باشیم):

$$f=\{(-2,5),(3,-4)\}\Rightarrow 2f=\{(-2,10),(3,-8)\}$$

توان‌های تابع: برای محاسبه توابعی مانند f^2، f^3 و ... کافیست مؤلفه‌های دوم را به‌توان برسانیم:

$$f=\{(4,-5),(2,3)\}\Rightarrow f^2=\{(4,25),(2,9)\}$$

توجه کنید که ضرب عدد ثابت یا به توان رساندن، دامنه تابع را تغییر نمی‌دهد.

۲۴۳- اگر $D_f=\mathbb{Z}-\{0\}$ و $D_g=\mathbb{W}$ باشد، دامنهٔ تابع $f+g$ کدام است؟

۱) $\mathbb{N}$ ۲) $\mathbb{W}$ ۳) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ۴) $\mathbb{W}-\{1\}$

۲۴۴- اگر $f(x)=\frac{1}{x+2}$ و $g(x)=\frac{x-3}{x^2-1}$ باشد، دامنهٔ تابع $h(x)=\frac{f}{g}$ شامل چند عدد طبیعی **نیست**؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۲۴۵- اگر $f(x)=\sqrt{3-x}$ و $g(x)=\frac{2x-1}{|x|+2}$ باشد، مقدار $(2f-g)(-1)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) تعریف نشده است.

۲۴۶- اگر $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=\frac{x-1}{x}$ باشد، ضابطهٔ تابع $\frac{g}{f}$ کدام است؟

۱) $\frac{g}{f}=\frac{1}{x(x+1)};x\neq\{0,\pm1\}$
۲) $\frac{g}{f}=\frac{1}{x(x+1)};x\neq\{0\}$
۳) $\frac{g}{f}=\frac{x+1}{x};x\neq\{0,\pm1\}$
۴) $\frac{g}{f}=\frac{x+1}{x};x\neq\{0\}$

۲۴۷- اگر $f(x)=\begin{cases}x+1 & ; x>0\\ x-1 & ; x\leq 0\end{cases}$ و $g(x)=x-2$ باشد، مقدار تابع $f+2g$ در $x=-1$ کدام است؟

۱) -5 ۲) -7 ۳) -6 ۴) -8

۲۴۸- اگر $f=\{(-1,2),(2,-3),(0,0)\}$ و $g=\{(-2,0),(0,1),(2,\frac{1}{2})\}$ باشد، تابع $f\times g$ کدام است؟

۱) $\{(0,1)\}$ ۲) $\{(0,1),(2,\frac{-3}{2})\}$ ۳) $\{(0,0),(2,\frac{-3}{2})\}$ ۴) $\{(0,0),(2,\frac{3}{2})\}$

۲۴۹- اگر $f=\{(2,5),(3,4),(4,6),(1,7)\}$ و $g=\{(1,3),(2,6),(5,2),(4,9)\}$ باشند. برد تابع $g-f$ ، کدام است؟ (انسانی داخل ۹۸)

۱) $\{-4,1,3\}$ ۲) $\{-4,2,3\}$ ۳) $\{-4,1,2,3\}$ ۴) $\{1,2,3,4\}$

۲۵۰- اگر $f=\{(1,2),(2,4),(4,5),(3,3)\}$ و $g=\{(3,2),(2,3),(6,1),(1,8)\}$ باشند. برد تابع $g\times f$ ، کدام است؟ (انسانی خارج ۹۸)

۱) $\{6,8,12\}$ ۲) $\{3,6,12,16\}$ ۳) $\{6,12,16\}$ ۴) $\{6,8,12,16\}$

۱۱ [۴] طبق تعریف، نموداری معرف یک تابع است که هر خط موازی با محور yها، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند (در بیش از یک نقطه قطع نکند) که فقط در نمودار گزینهٔ «۴» این‌چنین است. توجه کنید که در گزینه‌های «۱» و «۲»، به ازای یک طول مشخص، دو نقطه توپر وجود دارد. یعنی به ازای یک x، دو مقدار برای y داریم که نمی‌تواند معرف تابع باشد.

۱۲ [۳] تنها نمودار گزینهٔ «۳» یک تابع را نشان می‌دهد. در بقیهٔ گزینه‌ها، خط عمودی وجود دارد که نمودار را در بیش از یک نقطه (۲ یا بیشتر) قطع می‌کند.

۱۳ [۲] باید هر خط عمودی نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند، بنابراین حداقل باید یکی از نقاط A یا B و یکی از نقاط E یا F و یکی از نقاط G یا H حذف گردد. به طور مثال با حذف نقاط G ، F و B یک تابع ایجاد می‌شود.

۱۴ [۴] بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: هر خط موازی محور yها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، بنابراین یک تابع است.

گزینهٔ «۲»: به ازای هر x، تنها یک y داریم. بنابراین تابع است.

گزینهٔ «۳»: از هر عضو مجموعهٔ اول، تنها یک فلش خارج شده است، بنابراین یک تابع است.

گزینهٔ «۴»: $x=0 \Rightarrow y^2-0=1 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1 \Rightarrow$ تابع نیست.

۱۵ [۲] می‌دانیم ضابطه‌ای بیانگر یک تابع می‌باشد که در آن به ازای هر x ، فقط یک y وجود داشته باشد. حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: $x^2+y^2=1 \xrightarrow{x=0} y=\pm 1 \Rightarrow$ تابع نیست.

گزینهٔ «۲»: $\sqrt{y}=x-1 \xrightarrow{y>0} y=(x-1)^2 \Rightarrow$ تابع است،چون به‌ازای هر x، فقط یک y داریم.

گزینهٔ «۳»: $x=|y|+1 \xrightarrow{x=2} 2=|y|+1 \Rightarrow |y|=1 \Rightarrow y=\pm 1 \Rightarrow$ تابع نیست.

گزینهٔ «۴»: $y^2=x+1 \xrightarrow{x=0} y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1 \Rightarrow$ تابع نیست.

۱۶ [۲] بررسی روابط:

الف) $x=1 \Rightarrow |y|=1 \Rightarrow y=\pm 1 \Rightarrow$ تابع نیست.

ب) $y=|x|-1 \Rightarrow$ به‌ازای هر x دقیقاً یک y داریم. $\Rightarrow$ تابع است.

ج) $y=\sqrt{x}-1 \Rightarrow$ به‌ازای هر x مثبت، دقیقاً یک y داریم. $\Rightarrow$ تابع است.

در واقع به ازای هر $x \geq 0$ ، فقط یک y داریم و به ازای $x<0$ ، yای نداریم.

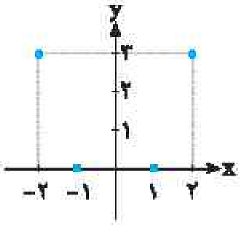
د) $x^2+y^2-4=0 \Rightarrow x^2+y^2=4 \xrightarrow{x=0} y=\pm 2 \Rightarrow$ تابع نیست.

بنابراین دو تا از روابط داده شده، تابع می‌باشند.

۱۷ [۱] با توجه به زوج مرتب‌های داده شده، تابع f به هر مؤلفهٔ اول، یک واحد بیشتر از توان دوم آن را نسبت می‌دهد که در نتیجه $f(x)=x^2+1$ به‌دست می‌آید.

۱۸ [۴] با تبدیل عبارت کلامی داده شده در صورت سؤال به یک عبارت جبری، ضابطهٔ f تعیین می‌شود:

$f(x)=x^2-1 \Rightarrow f=\{(-1,0),(-2,3),(1,0),(2,3)\} \xrightarrow{\text{رسم نمودار}}$



۱۹ [۳] بررسی گزینه‌ها:

با قرار دادن مقادیر $A=\{0,-1,-2\}$ در ضابطهٔ تابع، خروجی تابع را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ «۱»: $f(x)=x^2-5 \xrightarrow{x\in\{0,-1,-2\}} y\in\{-5,-4,-1\}$

گزینهٔ «۲»: $f(x)=2x+3 \xrightarrow{x\in\{0,-1,-2\}} y\in\{3,1,-1\}$

گزینهٔ «۳»: $f(x)=2x^2-1 \xrightarrow{x\in\{0,-1,-2\}} y\in\{-1,1,7\}$ ✓

گزینهٔ «۴»: $f(x)=x^2-1 \xrightarrow{x\in\{0,-1,-2\}} y\in\{-1,0,3\}$

۲۰ [۱]

$$f(0)=2, f(1)=0, f(2)=-1 \Rightarrow \frac{f(f(0))}{1-f(f(1))}=\frac{f(2)}{1-f(0)}=\frac{-1}{1-2}=\frac{-1}{-1}=1$$

۱۰۵ ۴ روش اول: کافی است جدول ارزش گزاره‌ها را برای گزاره‌های مطرح شده در گزینه‌ها رسم کنیم:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Leftrightarrow \sim q$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	F	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

بنابراین ستون پایانی جدول صورت سؤال، مربوط به گزارهٔ $\sim q \Rightarrow \sim p$ می‌باشد.

روش دوم: برای حل این‌گونه سؤالات، از روش رد گزینه استفاده کنید. مثلاً سطر سوم برای رد گزینه‌های «۱» و «۲» کافی است، چون در گزارهٔ دو شرطی وقتی یکی از گزاره‌ها نادرست باشد ارزش کل گزاره نادرست خواهد بود. هم‌چنین سطر دوم برای رد گزینهٔ «۳» کافی است.

۱۰۶ ۴ گزارهٔ عبارت صورت سؤال، معادل گزارهٔ $p \Rightarrow q$ می‌باشد که نقیض آن، معادل است با: $\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$

۱۰۷ ۴

$$\sim p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv \underbrace{\sim p \wedge (\sim p \vee q)}_{\text{قانون جذب}} \equiv \sim p$$

۱۰۸ ۴ عکس نقیض گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت $\sim q \Rightarrow \sim p$ است، پس داریم:

$$(p \wedge q) \Rightarrow \sim p \equiv \sim(\sim p) \Rightarrow \sim(p \wedge q) \xlongequal{\text{دمورگان}} p \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

۱۰۹ ۴ گزارهٔ صورت سؤال را تا حد امکان ساده می‌کنیم، داریم:

$$\underbrace{(p \Rightarrow q)}_{\sim p \vee q} \wedge \underbrace{(\sim p \Rightarrow q)}_{\sim(\sim p) \vee q} \equiv (\sim p \vee q) \wedge (p \vee q) \equiv q \vee \underbrace{(\sim p \wedge p)}_{F} \equiv q \vee F \equiv q \equiv T$$

پس طبق صورت سؤال، ارزش گزارهٔ q درست است و ارزش گزارهٔ $\sim q$ نادرست است.

۱۱۰ ۱ گزارهٔ داده‌شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$(\sim q \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \sim p \equiv (\sim q \wedge (\sim p \vee q)) \Rightarrow \sim p \equiv ((\sim q \wedge \sim p) \vee \underbrace{(\sim q \wedge q)}_{F}) \Rightarrow \sim p \equiv (\sim q \wedge \sim p) \Rightarrow \sim p$$

$$\equiv \sim(\sim q \wedge \sim p) \vee \sim p \equiv \underbrace{(q \vee p) \vee \sim p}_{\text{شرکت‌پذیری}} \equiv q \vee \underbrace{(p \vee \sim p)}_{T} \equiv q \vee T \equiv T$$

پس ارزش این گزاره همواره درست است. حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: $[\underbrace{(p \vee q) \wedge \sim p}_{\text{توزیع‌پذیری}}] \Rightarrow q \equiv [(\underbrace{\sim p \wedge p}_{F}) \vee (\sim p \wedge q)] \Rightarrow q$

$$\equiv (q \wedge \sim p) \Rightarrow q \equiv \sim(q \wedge \sim p) \vee q \equiv \underbrace{(\sim q \vee p) \vee q}_{\text{شرکت‌پذیری}} \equiv \underbrace{(\sim q \vee q)}_{T} \vee p \equiv T \vee p \equiv T$$

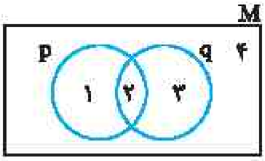
گزینهٔ «۲»: $[\underbrace{(p \vee \overbrace{q) \wedge q}^{\text{مثل هم‌اند}}}_{\text{قانون جذب}}] \Rightarrow \sim q \equiv q \Rightarrow \sim q \equiv \sim q \vee \sim q \equiv \sim q$

گزینهٔ «۳»: $[\underbrace{(p \vee q) \wedge \sim p}_{\text{توزیع‌پذیری}}] \Rightarrow \sim q \equiv [(\underbrace{\sim p \wedge p}_{F}) \vee (\sim p \wedge q)] \Rightarrow \sim q$

$$\equiv [F \vee (\sim p \wedge q)] \Rightarrow \sim q \equiv (\sim p \wedge q) \Rightarrow \sim q \equiv \sim(\sim p \wedge q) \vee \sim q \equiv (p \vee \sim q) \vee \sim q \equiv p \vee \sim q$$

گزینهٔ «۴»: $[\underbrace{(\overbrace{p) \vee q) \wedge p}^{\text{مثل هم‌اند}}}_{\text{قانون جذب}}] \Rightarrow q \equiv p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

۱۱۱ ۴ این سؤال را از روش مجموعه‌ها حل می‌کنیم. هر گزاره را به عنوان یک مجموعه در نظر می‌گیریم و مجموعهٔ متناظر با گزارهٔ هر گزینه را تعیین می‌کنیم:



$$\Rightarrow p = \{۱,۲\}, q = \{۲,۳\}, p'(\text{معادل نقیض } p) = \{۳,۴\}, q'(\text{معادل نقیض } q) = \{۱,۴\}$$

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv \overbrace{(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)}^{\text{همون گزینهٔ «۳» است!!}} \xrightarrow{\text{متناظر با}} \{۲,۳,۴\} \cap \{۱,۲,۴\} = \{۲,۴\}$

گزینهٔ «۲»: $\sim p \Leftrightarrow \sim q \equiv (\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv (p \vee \sim q) \wedge (q \vee \sim p) \xrightarrow{\text{متناظر با}} \{۱,۲,۴\} \cap \{۲,۳,۴\} = \{۲,۴\}$

گزینهٔ «۴»: $(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \xrightarrow{\text{متناظر با}} \{۳\} \cup \{۱\} = \{۳,۱\}$